

Libros de **Cátedra**

Cálculo en 2 y 3 variables

Enfoque teórico-práctico para CiBEx

Mariela Adelina Portesi, María Laura Schuverdt
y Esteban Eduardo Baragatti

FACULTAD DE
CIENCIAS EXACTAS

e
exactas

 **Edulp**
Editorial
de la Universidad
de La Plata



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA

CÁLCULO EN 2 Y 3 VARIABLES

ENFOQUE TEÓRICO-PRÁCTICO PARA CIBEX

Mariela Adelina Portesi
María Laura Schuverdt
Esteban Eduardo Baragatti

Facultad de Ciencias Exactas



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA



A Tigo, a la Loca, al Rubio, al Chuby, a la Negra y a los cinco loquitos (EEB)
A la memoria de mis abuelas, por las matemáticas y por la docencia (MAP)
A Luciano, María Emilia y Juan Manuel (MLS)

Agradecimientos

Los autores desean agradecer: A la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata y, en particular, al Departamento de Matemática. A los docentes que con sus comentarios y observaciones han colaborado a mejorar este material de estudio. Muy especialmente a la Dra. María Teresa Martín, colega y amiga. Gracias Tere, por tu participación desinteresada en la producción de la presente obra y por tu dedicado compromiso con la enseñanza de la matemática. A tantos colegas actuales, que fueron nuestros docentes. A nuestros alumnos, estudiantes de las carreras del CiBEx, de quienes mucho aprendemos día a día.

Índice general

1	GEOMETRÍA DEL ESPACIO Y DEL PLANO	
1.1	Sistema de coordenadas cartesianas y vectores en el espacio	12
1.1.1	Sistema de coordenadas cartesianas tridimensional	12
1.1.2	Vectores en el espacio	15
1.1.3	Ejercicios	16
1.2	Sistema de coordenadas cartesianas y vectores en el plano	16
1.2.1	Sistema de coordenadas cartesianas bidimensional	17
1.2.2	Vectores en el plano	18
1.2.3	Ejercicios	19
1.3	Operaciones algebraicas con vectores	20
1.3.1	Operaciones de suma y productos	20
1.3.2	Módulo de un vector y normalización de un vector	22
1.3.3	Ejercicios	26
1.4	Trabajar en varias dimensiones	27
1.5	Ecuaciones de una recta en el plano y en el espacio	29
1.5.1	Recta en el plano	29
1.5.2	Recta en el espacio	30
1.5.3	Ejercicios	34
1.6	Ecuaciones de un plano en el espacio	34
1.6.1	Plano en el espacio	34
1.6.2	Ejercicios	39
1.7	Otras superficies en el espacio	40
1.7.1	Superficies cuádricas	40
1.7.2	Superficies cilíndricas generales	44
1.7.3	Ejercicios	45
1.8	Otros sistemas de coordenadas	46
1.8.1	Sistema de coordenadas polares en el plano	46
1.8.2	Sistema de coordenadas cilíndricas en el espacio	49
1.8.3	Sistema de coordenadas esféricas en el espacio	50
1.8.4	Ejercicios	52
1.9	Actividades integradoras y autoevaluación	52
1.9.1	Actividades integradoras	52
1.9.2	Autoevaluación	53
2	FUNCIONES VECTORIALES DE UN PARÁMETRO	
2.1	Curvas paramétricas y funciones vectoriales de un parámetro	56
2.1.1	Curvas paramétricas	56
2.1.2	Ejercicios	66
2.2	Derivación e integración de funciones vectoriales	68
2.2.1	Límite y continuidad	68
2.2.2	Derivación	69
2.2.3	Integración	75
2.2.4	Ejercicios	75
2.3	Longitud de una curva paramétrica	76
2.3.1	Función longitud de arco	78
2.3.2	Ejercicios	79
2.4	Aplicación: Movimiento en el espacio	80
2.4.1	Ejercicios	83

2.5	Actividades integradoras y autoevaluación	84
2.5.1	Actividades integradoras	84
2.5.2	Autoevaluación	85
3	FUNCIONES ESCALARES DE VARIAS VARIABLES	
3.1	Funciones escalares de varias variables	88
3.1.1	Funciones escalares de dos variables	88
3.1.2	Funciones escalares de tres variables	97
3.1.3	Ejercicios	99
3.2	Límite y continuidad	100
3.2.1	Ejercicios	107
3.3	Derivadas parciales	108
3.3.1	Ejercicios	114
3.4	Diferenciabilidad, aproximación lineal y plano tangente	115
3.4.1	Diferenciabilidad	115
3.4.2	Plano tangente	117
3.4.3	Aproximación lineal	118
3.4.4	Ejercicios	120
3.5	Composición de funciones de varias variables. Reglas de la cadena	120
3.5.1	Composición de funciones de varias variables	120
3.5.2	Reglas de la cadena para derivar funciones compuestas de varias variables	122
3.5.3	Ejercicios	125
3.6	Más sobre cambios de una función de varias variables	126
3.6.1	Derivadas direccionales	126
3.6.2	Vector gradiente	131
3.6.3	Dirección de máximo crecimiento	132
3.6.4	Derivada direccional y curvas de nivel	132
3.6.5	Derivada direccional y superficies de nivel	135
3.6.6	Derivación parcial implícita	136
3.6.7	Ejercicios	138
3.7	Anexo A. Derivadas de órdenes superiores para funciones compuestas	139
3.8	Actividades integradoras y autoevaluación	139
3.8.1	Actividades integradoras	139
3.8.2	Autoevaluación	142
4	OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES ESCALARES DE VARIAS VARIABLES	
4.1	Optimización de funciones escalares de varias variables	146
4.1.1	Puntos críticos de una función de dos variables	146
4.1.2	Ejercicios	151
4.2	Clasificación de puntos estacionarios de una función de dos variables	151
4.2.1	Ejercicios	154
4.3	Extremos de una función de dos variables en una región cerrada y acotada	154
4.3.1	Ejercicios	157
4.4	Resolución de problemas con restricciones	157
4.4.1	Método de los multiplicadores de Lagrange: función de 2 variables y 1 vínculo	158
4.4.2	Método de los multiplicadores de Lagrange: función de 3 variables y 1 vínculo	161
4.4.3	Método de los multiplicadores de Lagrange: función de 3 variables y 2 vínculos	162
4.4.4	Aplicación al cálculo de extremos en una región cerrada y acotada	163
4.4.5	Ejercicios	165

4.5	Anexo A. Puntos críticos y estacionarios de una función de n variables	165
4.6	Anexo B. Justificación de criterios de las derivadas segundas	166
4.7	Actividades integradoras y autoevaluación	167
4.7.1	Actividades integradoras	167
4.7.2	Autoevaluación	168
5	INTEGRACIÓN DE FUNCIONES ESCALARES DE VARIAS VARIABLES	
5.1	Integrales dobles	171
5.1.1	Integral doble en un rectángulo	171
5.1.2	Integral doble en una región plana general	177
5.1.3	Propiedades de las integrales dobles	180
5.1.4	Cambio de variables en integrales dobles	184
5.1.5	Aplicaciones de las integrales dobles	187
5.1.6	Ejercicios	189
5.2	Integrales triples	190
5.2.1	Integral triple en un prisma	190
5.2.2	Integral triple en una región sólida general	192
5.2.3	Cambio de variables en integrales triples	197
5.2.4	Aplicaciones de las integrales triples	199
5.2.5	Ejercicios	202
5.3	Integrales de línea	203
5.3.1	Integral de línea de una función escalar de dos o tres variables	204
5.3.2	Aplicaciones de las integrales de línea	210
5.3.3	Ejercicios	211
5.4	Integrales de superficie	211
5.4.1	Superficies paramétricas y funciones vectoriales de dos parámetros	211
5.4.2	Integral de superficie de una función escalar de tres variables	217
5.4.3	Aplicaciones de las integrales de superficie	219
5.4.4	Ejercicios	220
5.5	Anexo A. Tabla de primitivas	221
5.6	Anexo B. Integrales dobles y triples en otros sistemas de coordenadas	221
5.7	Actividades integradoras y autoevaluación	224
5.7.1	Actividades integradoras	224
5.7.2	Autoevaluación	225
6	CAMPOS VECTORIALES	
6.1	Campos vectoriales	228
6.1.1	Definición de campo vectorial	228
6.1.2	Aplicaciones	231
6.1.3	Derivadas de un campo vectorial	235
6.1.4	Ejercicios	238
6.2	Integral de línea de un campo vectorial. Teorema Fundamental	239
6.2.1	Ejercicios	242
6.2.2	Teorema fundamental para integrales de línea	242
6.2.3	Independencia de la trayectoria	244
6.2.4	Ejercicios	249
6.3	Integral de superficie de un campo vectorial	250
6.3.1	Ejercicios	254
6.4	Teorema de Green	254
6.4.1	Teorema de Green y campos vectoriales	259
6.4.2	Ejercicios	260

6.5	Teorema de Stokes o Teorema del rotor	260
6.5.1	Ejercicios	264
6.6	Teorema de Gauss o Teorema de la divergencia	264
6.6.1	Ejercicios	267
6.7	Actividades integradoras y autoevaluación	268
6.7.1	Actividades integradoras	268
6.7.2	Autoevaluación	269

Introducción

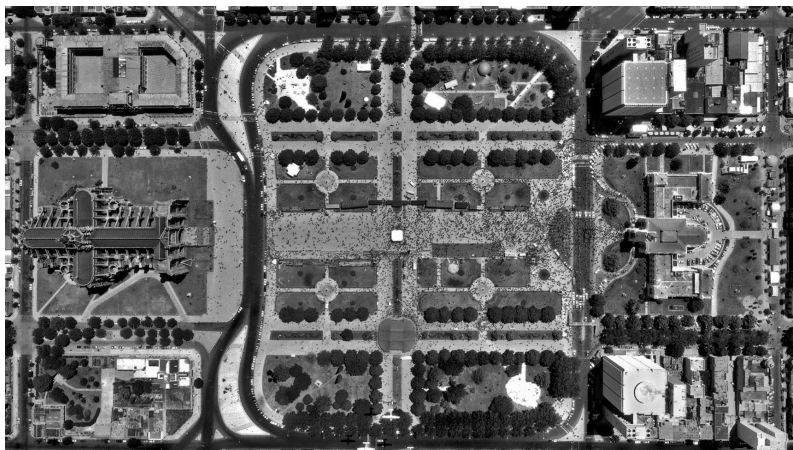
El presente libro de cátedra se ideó con el objetivo de guiar el desarrollo de la asignatura Análisis Matemático II que cursan los alumnos en el segundo semestre del ciclo básico (CiBEx) de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata. Se cubren los temas curriculares desde una perspectiva que pretende la integración horizontal y vertical en los diferentes planes de estudio, correspondientes a ocho carreras de grado de esta Facultad y dos carreras de Profesorado de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación.

Este libro brinda un encuadre teórico-práctico de la materia, como está previsto en los planes de estudio vigentes. Se incluye tanto el material teórico básico como ejercitación sobre el cálculo diferencial e integral de funciones de dos o tres variables, junto con problemas de aplicación que resaltan los puntos principales de cada tema, a fin de que puedan abarcarse los contenidos de la materia en el plazo establecido. Cada capítulo cuenta con ejercicios de integración temática y una autoevaluación para propiciar el desarrollo de una actitud crítica de los estudiantes como herramienta fundamental en su formación.

A lo largo de todo el texto se ha incorporado una gran variedad de recursos GeoGebra. Algunos de ellos permiten visualizar los conceptos matemáticos que se desarrollan en el curso, y otros se presentan con actividades para realizar, relacionadas con los ejemplos resueltos o los ejercicios propuestos. Varios recursos son de elaboración propia pero otros fueron seleccionados de la comunidad GeoGebra y en todos esos casos se ha registrado la autoría correspondiente. El software aporta tres facetas potentes y útiles en el marco del curso: es una herramienta integral para el trabajo con los distintos tipos de representación de los conceptos matemáticos favoreciendo su construcción, provee una plataforma versátil para la exploración, elaboración, testeo y validación de conjeturas, y resulta un medio accesible para promover un trabajo colectivo y una participación activa de los estudiantes en el aula.

Este libro de cátedra recoge la experiencia de los autores en el dictado de la asignatura y está basado en las guías elaboradas por los equipos coordinadores a cargo en los últimos semestres, con el aporte de docentes asignados a la materia en este período.

Nuestro deseo es que este material sirva como orientación para el trabajo de docentes y alumnos a lo largo del curso, dando un marco unificado en cuanto a los temas a abordar y su profundidad, y que pueda servir también como referencia para los estudiantes en instancias más avanzadas de su formación universitaria.



Plaza Moreno, La Plata (Noviembre de 1982)

Archivo Fotográfico de Ministerio de Infraestructura:

<http://archivofotografico.mosp.gba.gov.ar>

1 Geometría del espacio y del plano

1.1	Sistema de coordenadas cartesianas y vectores en el espacio	12
1.1.1	Sistema de coordenadas cartesianas tridimensional	12
1.1.2	Vectores en el espacio	15
1.1.3	Ejercicios	16
1.2	Sistema de coordenadas cartesianas y vectores en el plano	16
1.2.1	Sistema de coordenadas cartesianas bidimensional	17
1.2.2	Vectores en el plano	18
1.2.3	Ejercicios	19
1.3	Operaciones algebraicas con vectores	20
1.3.1	Operaciones de suma y productos	20
1.3.2	Módulo de un vector y normalización de un vector	22
1.3.3	Ejercicios	26
1.4	Trabajar en varias dimensiones	27
1.5	Ecuaciones de una recta en el plano y en el espacio	29
1.5.1	Recta en el plano	29
1.5.2	Recta en el espacio	30
1.5.3	Ejercicios	34
1.6	Ecuaciones de un plano en el espacio	34
1.6.1	Plano en el espacio	34
1.6.2	Ejercicios	39
1.7	Otras superficies en el espacio	40
1.7.1	Superficies cuádricas	40
1.7.2	Superficies cilíndricas generales	44
1.7.3	Ejercicios	45
1.8	Otros sistemas de coordenadas	46
1.8.1	Sistema de coordenadas polares en el plano	46
1.8.2	Sistema de coordenadas cilíndricas en el espacio	49
1.8.3	Sistema de coordenadas esféricas en el espacio	50
1.8.4	Ejercicios	52
1.9	Actividades integradoras y autoevaluación	52
1.9.1	Actividades integradoras	52
1.9.2	Autoevaluación	53

1.1 Sistema de coordenadas cartesianas y vectores en el espacio

Cuando se estudia un objeto físico (por ejemplo un auto o la molécula de ADN, un líquido en una pipeta o sangre fluyendo en una arteria, la energía liberada en cierta reacción química, etc), uno está interesado en describir sus propiedades (características del objeto, como la masa o la densidad) y su estado (situación en la que se encuentra, como la temperatura o la velocidad). Las propiedades y los estados se representan por medio de magnitudes que se pueden medir. Algunas magnitudes como la masa o la presión son llamadas *magnitudes escalares* pues consisten de un número real (un escalar) y una unidad de medida ¹. Otras magnitudes requieren más de un número y unidad para quedar bien definidas. Éste es el caso, por ejemplo, cuando se quiere describir el desplazamiento de una persona para ir -digamos- desde la terminal de ómnibus de La Plata hasta un aula del segundo piso de nuestra Facultad donde se dicta Análisis Matemático II. Necesitamos utilizar segmentos “orientados” (denominados vectores), esto es, tramos con una dirección, sentido y “largo” dados. Las magnitudes como el desplazamiento o la velocidad son llamadas *magnitudes vectoriales* pues actúan como los vectores.

Recordemos, cómo se definen y cómo se opera matemáticamente con vectores. Empezamos en primer lugar por plantear un sistema cartesiano de coordenadas, que nos sirve como referencia para ubicar la posición de un objeto y para ver el cambio relativo de su posición, o sea, su desplazamiento.

1.1.1 Sistema de coordenadas cartesianas tridimensional

Consta de un punto fijo u *origen de coordenadas* O , y tres rectas o *ejes coordenados* x , y y z que pasan por O y son perpendiculares entre sí; los semiejes positivos se orientan de acuerdo a la *regla de la mano derecha* (o sentido de avance de un tornillo). Quedan determinados tres *planos coordenados*: xy , yz y xz ; y el espacio queda dividido en ocho *octantes*. Ver Figura 1.1.1.

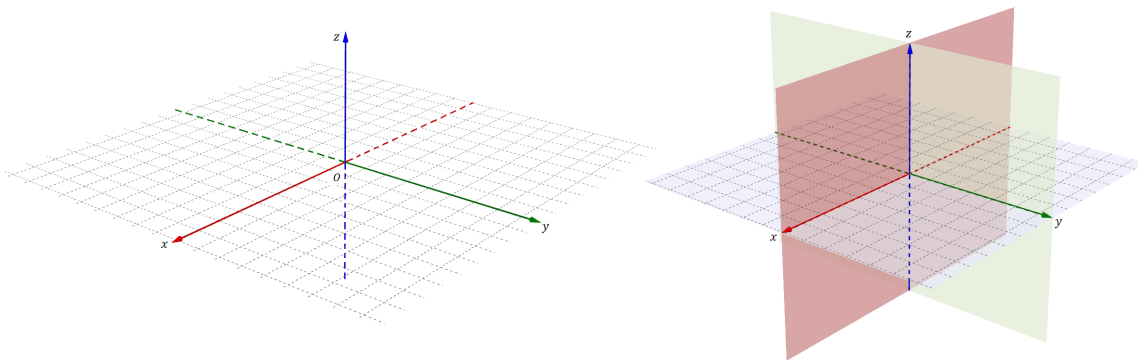


Figura 1.1.1: Ejes cartesianos y planos coordenados en el espacio.

Denotamos un punto en el espacio por $P(x, y, z)$ o simplemente por la terna ordenada (x, y, z) , donde los números reales x , y y z se llaman *coordenadas cartesianas* del punto P . Se designa con \mathbb{R}^3 al conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales, que se corresponden con todos

¹ En las actividades y problemas de aplicación se indicarán las unidades de medida. Salvo que se indique otra cosa, adoptaremos las unidades del sistema MKS, donde se expresan las medidas utilizando como unidades fundamentales el metro (m) para la longitud, el kilogramo (kg) para la masa, y el segundo (s) para el tiempo.

los puntos del espacio:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty\}.$$

Dado un punto $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, el punto $P_I(x, y, 0)$ se denomina proyección (perpendicular) de P en el plano coordenado xy , mientras que $P_{II}(0, y, z)$ es la proyección de P en el plano coordenado yz , y $P_{III}(x, 0, z)$ es la proyección de P en el plano coordenado xz . En la Figura 1.1.2 se muestra un dibujo (en perspectiva) de un sistema de coordenadas tridimensional; el punto indicado como ejemplo es $P(2, 2, 3)$ y sus proyecciones son $P_I(2, 2, 0)$, $P_{II}(0, 2, 3)$ y $P_{III}(2, 0, 3)$. Ubique en la figura los puntos $A(1, 1, 3)$ y $B(-1, 3, 2)$.

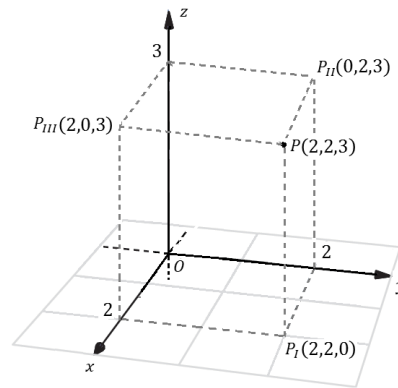


Figura 1.1.2: Sistema de coordenadas cartesianas tridimensional (primer octante).

La *distancia* entre el origen $O(0, 0, 0)$ y un punto $P(x, y, z)$ es

$$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

La distancia entre dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Es una cantidad escalar, y mayor o igual que cero: $d(P_1, P_2) \geq 0$. Por ejemplo, la distancia entre O y $P(2, 2, 3)$ vale $d(O, P) = \sqrt{17}$ metros. Calcule la distancia entre los puntos $A(1, 1, 3)$ y $B(-1, 3, 2)$. Ver Figura 1.1.3.

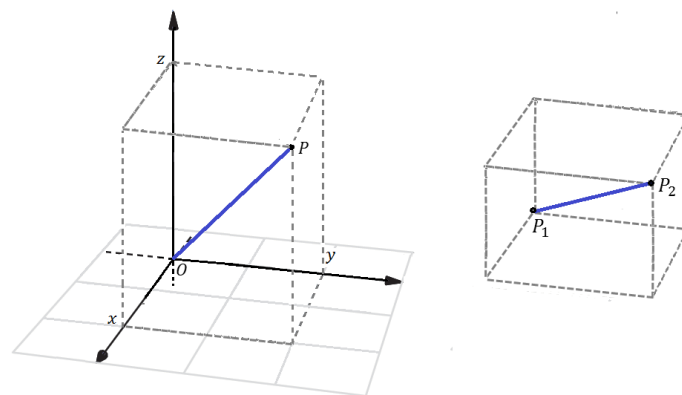


Figura 1.1.3: Distancia entre dos puntos en un sistema de coordenadas cartesianas tridimensional.

Veamos ahora, a través de algunos ejemplos, diferentes tipos de regiones en el espacio:

- **Ejemplo 1.1.1** La ecuación $z = 0$ representa el plano coordenado xy ; mientras que $x = 0$ es el plano coordenado yz ; e $y = 0$ es el plano coordenado xz . La desigualdad $z > 0$ representa el semiespacio superior. Si tomamos aquellos puntos tales que $x > 0, y > 0, z > 0$, nos estamos refiriendo al *primer octante*. El par de ecuaciones $y = 0, z = 0$ representa el eje coordenado x ; mientras que $x = 0, z = 0$ indican el eje coordenado y ; y $x = 0, y = 0$ dan el eje coordenado z .

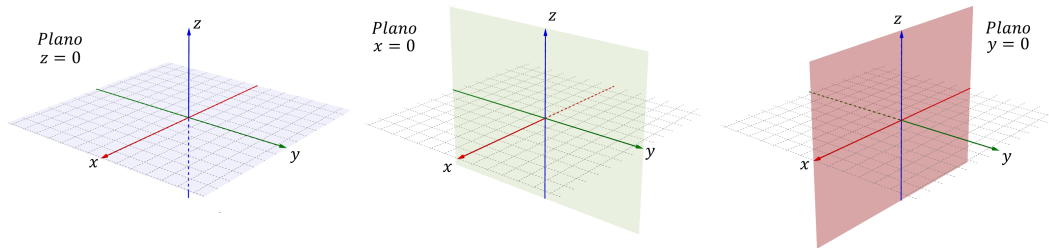


Figura 1.1.4: Cada plano coordenado con su correspondiente ecuación.

- **Ejemplo 1.1.2 Regiones sólidas.** Consideremos el conjunto E de aquellos puntos $P(x, y, z)$ del espacio que distan del origen en 3 o menos unidades, luego sus coordenadas satisfacen la desigualdad $d(O, P) \leq 3$, esto es $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 3$, que también se puede expresar como $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$; su representación gráfica es la región sólida dada por la esfera de radio 3 centrada en O . ¿Qué región sólida B representa la desigualdad $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 < 16$? Se dice que la esfera E es una *región sólida cerrada* (tiene borde o frontera), mientras que B es una *región sólida abierta*.

- **Ejemplo 1.1.3 Superficies.** La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ corresponde a la superficie esférica S formada por todos los puntos que se encuentran exactamente a 2 unidades del origen. Por otro lado, la ecuación $z = 3$ indica que de todo el espacio sólo se debe considerar el conjunto Π de puntos de la forma $(x, y, 3)$, siendo x e y cualesquiera, por lo tanto se refiere a la superficie dada por un plano horizontal (paralelo al plano xy), a altura 3. Se dice que la superficie esférica S es una *superficie cerrada* (y encierra un sólido en su interior), mientras que el plano Π es una *superficie abierta*.

- **Ejemplo 1.1.4 Curvas.** Todas las ternas (x, y, z) que satisfacen el par de ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x = 0$, corresponden gráficamente a la intersección entre una superficie esférica y un plano dando lugar a la curva C que es la circunferencia de radio 1 centrada en O contenida en el plano yz . Otro ejemplo es el conjunto de puntos tales que $x = 2, y = 2$, para cualquier z , que corresponde a la recta L paralela al eje z y que pasa, por ejemplo, por $P(2, 2, 3)$. Se dice que la circunferencia C es una *curva cerrada*, mientras que la recta L es una *curva abierta*.

Ejercicio Esboce a mano alzada las gráficas de las regiones sólidas E y B , las superficies S y Π , y las curvas C y L .

1.1.2 Vectores en el espacio

Denotamos un *vector* en el espacio como \vec{v} (con una flechita arriba) ó \mathbf{v} (en negrita), y en *componentes* mediante una terna ordenada como $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, donde v_1, v_2 y v_3 son números reales. Otra notación para vectores (trabajada en Álgebra) proviene de la correspondencia bi-unívoca entre estos objetos y matrices columna en $\mathbb{R}^{3 \times 1}$: $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Se designa con V_3 al conjunto de vectores del espacio.

Un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in V_3$ se puede representar gráficamente mediante un segmento orientado o “flecha” en el espacio; la *dirección*, *sentido* y *magnitud* del segmento caracterizan al vector. La flecha va desde un punto cualquiera tomado como *punto inicial* o *de aplicación* $A(a_1, a_2, a_3)$ hasta un *punto final* o *terminal* $B(b_1, b_2, b_3)$, donde $v_1 = b_1 - a_1, v_2 = b_2 - a_2$ y $v_3 = b_3 - a_3$; luego se escribe $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. El punto de aplicación del vector puede ser cualquiera; en particular, si se elige el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ como punto inicial, se dice que el vector está en *posición canónica* y se escribe $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$, donde $P(x, y, z)$ es el punto final del vector. Hay una correspondencia bi-unívoca entre un vector \overrightarrow{OP} de V_3 (ubicado en posición canónica) y un punto P de \mathbb{R}^3 ; utilizaremos esta biyección para identificar una terna ordenada con un vector o con un punto, según nos resulte más conveniente. En la Figura 1.1.5 se muestra el vector $\vec{v} = (2, 2, 3)$ aplicado en $A(1, 1, 3)$ y también aplicado en el origen; este último, que va de O al punto $P(2, 2, 3)$, es el representante del vector en posición canónica y lo denotamos por \vec{r} .

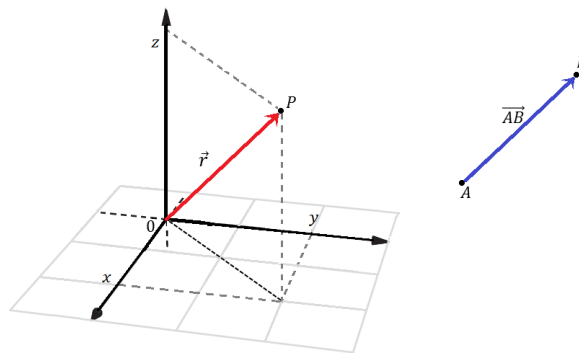


Figura 1.1.5: \overrightarrow{AB} y $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ son representantes del vector $\vec{v} = (x, y, z) \in V_3$.

Vector nulo:

$\vec{0} = (0, 0, 0) \in V_3$. Se representa mediante un punto en el espacio (el punto inicial y el punto final coinciden); en posición canónica es el origen de coordenadas; no tiene una dirección definida, y su magnitud es cero.

Vectores base unitarios o versores básicos en V_3 :

$\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$ (se denotan con una pequeña “u” sobre la letra). Se representan gráficamente por medio de segmentos orientados de longitud 1, paralelos a los ejes coordenados y apuntando en el sentido positivo de los ejes. En la Figura 1.1.6 se muestran los versores básicos ubicados en posición canónica: \vec{i} es la flecha que va del origen al punto $P_1(1, 0, 0)$, \vec{j} va del origen a $P_2(0, 1, 0)$, y \vec{k} va del origen a $P_3(0, 0, 1)$.

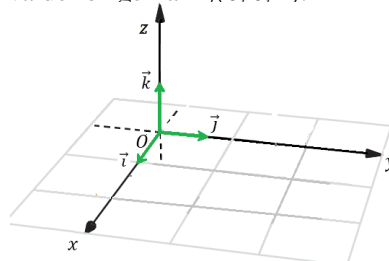


Figura 1.1.6: Versores básicos de V_3 : $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

- **Ejemplo 1.1.5** Para analizar el movimiento de un par de objetos en el espacio, un observador fija un sistema coordenado como referencia. Está interesado en saber hacia dónde y cuánto se desplazan los objetos. Mide para uno de los objetos que el punto inicial es $A(1, 2, 3)$ y el punto final es $B(1, 5, 8)$. El otro objeto está inicialmente en el origen de coordenadas O del sistema de referencia y se mueve hasta el punto $P(0, 3, 5)$. ¿Cómo está dado el desplazamiento neto de cada objeto? El observador afirma que el desplazamiento total del primer objeto está dado por el vector $\overrightarrow{AB} = (1 - 1, 5 - 2, 8 - 3) = (0, 3, 5)$, y el del segundo objeto por el vector $\overrightarrow{OP} = (0, 3, 5)$. Ambos desplazamientos son equivalentes: 3 unidades hacia un lado y 5 unidades hacia arriba. ■

1.1.3 Ejercicios

- Para fijar ideas mientras esté en clase, elija un punto del aula como origen de coordenadas, 3 líneas como ejes coordenados, y 3 paredes (o piso) como planos coordenados. Utilizando como unidad de medida el metro (más o menos un paso largo):
 - Estime las coordenadas de una de las teclas de luz, de una tiza que encuentre caída en el piso, de una tiza o fibrón en el pizarrón, de una de sus manos, y de celular;
 - Si una tiza cae al piso, ¿cuál será su ubicación?;
 - Calcule la distancia entre su mano y su celular, y entre su mano y la tecla de luz.
- En un sistema coordenado tridimensional ubique los puntos $Q(1, 1, 0)$, $R(2, -1, 3)$ y $S(1, 1, 3)$. Calcule las distancias entre ellos.
- ¿Qué representa $z = 3$? ¿ $Y z = 3, x = 2$? ¿ $Y z \leq 3$? Grafique.
- Expresé como igualdades o desigualdades los siguientes conjuntos de puntos en el espacio:
 - los puntos del primer octante;
 - los puntos de un cascarón esférico interiores a la superficie esférica de radio 4 y exteriores a la esfera de radio 2, centradas ambas en el origen;
 - los puntos que están a altura 3, con las otras dos componentes de distinto signo entre sí;
 - los puntos que distan de $(2, 2, 3)$ en exactamente 5 unidades;
 - el o los puntos, si existen, tales que su proyección en el plano xy es el $(2, 3, 0)$ y en el plano yz es el $(0, 3, 5)$.
- Explique con sus palabras qué regiones del espacio representan las siguientes relaciones:
 - $xy > 0, z = -3$
 - $xyz > 0$
 - $xyz = 0$
 - $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$
 - $x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1$.
- La ecuación cuadrática $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 8z + 1 = 0$ corresponde a una superficie esférica. Halle el radio y las coordenadas del centro. Grafique.
- Expresé en componentes el vector que va del punto $(-1, 2, 3)$ al punto $(3, 3, 4)$, y encuentre su representante en posición canónica. Idem si el punto inicial es $(2, -1, -2)$ y el punto final es $(-4, 3, 7)$.
- Para los puntos del Ejercicio 2, obtenga \overrightarrow{QR} , \overrightarrow{RS} y \overrightarrow{QS} , y señálelos en el gráfico. ¿Qué puede decir del “largo” de estos vectores?

1.2 Sistema de coordenadas cartesianas y vectores en el plano

Volviendo a los comentarios introductorios de la sección anterior, supongamos que se quiere describir el desplazamiento de una persona para ir desde la estación de trenes de La Plata hasta la oficina de Alumnos de nuestra Facultad. Claramente, la coordenada vertical no es relevante para analizar este problema y podemos tratar la situación “modelando” en un plano (el plano

del piso), utilizando un sistema de coordenadas bidimensional y vectores con dos componentes. Ver Figura 1.2.1.

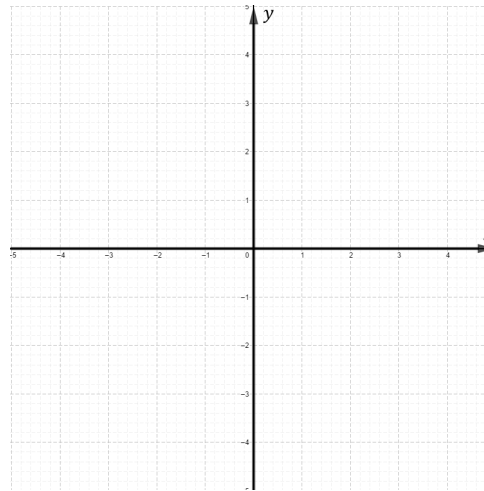


Figura 1.2.1: Ejes cartesianos en el plano.

1.2.1 Sistema de coordenadas cartesianas bidimensional

Consta de un punto fijo u *origen de coordenadas* O , y dos rectas o *ejes coordenados* x e y que pasan por O y son perpendiculares entre sí; los semiejes positivos se orientan en *sentido antihorario* (o sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj). El plano queda dividido en cuatro *cuadrantes*.

Denotamos un punto en el plano por $P(x, y)$ o simplemente por el par ordenado (x, y) , donde el número real x es la *coordenada cartesiana* x o *abscisa*, y el número real y es la *coordenada cartesiana* y u *ordenada* del punto P . Se designa con \mathbb{R}^2 al conjunto de todos los pares ordenados de números reales, que se corresponden con todos los puntos del plano:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\}.$$

Dado un punto $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$, el punto $P_I(x, 0)$ es la proyección (perpendicular) de P en el eje coordenado x , mientras que $P_{II}(0, y)$ es la proyección de P en el eje coordenado y . En la Figura 1.2.2 se muestra un dibujo de un sistema de coordenadas bidimensional; el punto indicado como ejemplo es $P(1, 2)$ y sus proyecciones son $P_I(1, 0)$ y $P_{II}(0, 2)$. Ubique en la figura los puntos $A(-2, 3)$ y $B(3, 2)$.

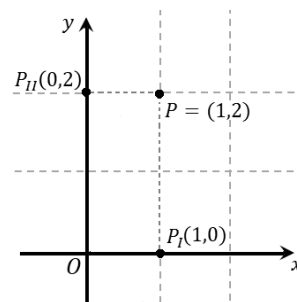


Figura 1.2.2: Sistema de coordenadas cartesianas bidimensional (primer cuadrante).

La distancia entre el origen $O(0, 0)$ y un punto $P(x, y)$ es

$$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Por ejemplo, en la Figura 1.2.3 la distancia entre O y $P(1, 2)$ vale $d(O, P) = \sqrt{5}$ m. Calcule la distancia entre los puntos $A(-2, 3)$ y $B(3, 2)$. Ver Figura 1.2.3

La distancia entre dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

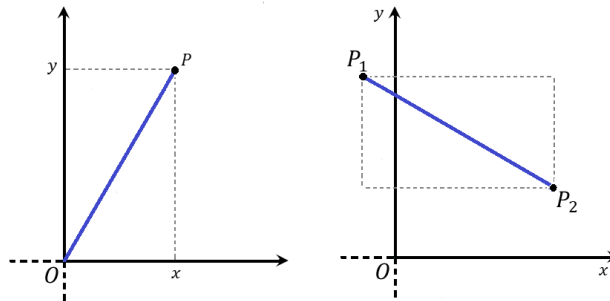


Figura 1.2.3: Distancia entre dos puntos en un sistema de coordenadas cartesianas bidimensional.

Veamos ahora, a través de algunos ejemplos, diferentes tipos de regiones en el plano:

-
- **Ejemplo 1.2.1** La ecuación $y = 0$ representa el eje coordenado x ; mientras que $x = 0$ es el eje coordenado y . La desigualdad $y > 0$ representa el semiplano superior; mientras que $x > 0$ indica el semiplano derecho. Si tomamos aquellos puntos tales que $x > 0, y > 0$, nos estamos refiriendo al primer cuadrante. ■

-
- **Ejemplo 1.2.2 Regiones planas:** Consideremos el conjunto D de aquellos puntos $P(x, y)$ del plano que distan del origen en 3 o menos unidades, luego sus coordenadas satisfacen la desigualdad $x^2 + y^2 \leq 9$; su representación gráfica es la región plana dada por el círculo de radio 3 centrado en O . ¿Qué región plana R representa la desigualdad $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 < 16$? Se dice que el círculo D es una *región plana cerrada* (tiene borde o frontera), mientras que B es una *región plana abierta*. ■

-
- **Ejemplo 1.2.3 Curvas** Todos los pares (x, y) que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, corresponden gráficamente a la curva C que es la circunferencia de radio 1 centrada en O . Otro ejemplo es el conjunto de puntos tales que $y = 2$, para cualquier x , que corresponde a la recta L paralela al eje x y que pasa, por ejemplo, por $P(1, 2)$. La circunferencia C es una *curva cerrada*, mientras que la recta L es una *curva abierta*. ■

Ejercicio Esboce a mano alzada las gráficas de las regiones planas D y R , y las curvas C y L .

1.2.2 Vectores en el plano

Denotamos un vector en el plano como \vec{v} ó \mathbf{v} , y en *componentes* mediante un par ordenado como $\vec{v} = (v_1, v_2)$, donde v_1 y v_2 son números reales. Otra notación para vectores proviene de la correspondencia bi-unívoca entre estos objetos y matrices columna en $\mathbb{R}^{2 \times 1}$: $\vec{v} = (v_1, v_2) \leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Se designa con V_2 al conjunto de vectores del plano.

Un vector $\vec{v} = (v_1, v_2) \in V_2$ se puede representar gráficamente mediante un segmento orientado o “flecha” en el plano. La flecha va desde un punto cualquiera tomado como *punto inicial* o *de aplicación* $A(a_1, a_2)$ hasta un *punto final* o *terminal* $B(b_1, b_2)$, donde $v_1 = b_1 - a_1$ y $v_2 = b_2 - a_2$; luego se escribe $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. El punto de aplicación del vector es arbitrario; en particular, si se elige el origen de coordenadas $O(0, 0)$ como punto inicial, se dice que el vector está en *posición canónica* y se escribe $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = (x, y)$, donde $P(x, y)$ es el punto final del vector. Observamos entonces que hay una correspondencia bi-unívoca entre un vector \overrightarrow{OP} de V_2 (ubicado en posición canónica) y un punto P de \mathbb{R}^2 ; utilizaremos esta biyección para identificar un par ordenado con un vector o con un punto, según nos resulte más conveniente. En la Figura 1.2.4 se muestra el vector $\vec{v} = (1, 3)$ aplicado en $A(2, 1)$ y aplicado en el origen; este último, que va de O al punto $P(1, 3)$, es el representante del vector en posición canónica y lo denotamos por \vec{r} .

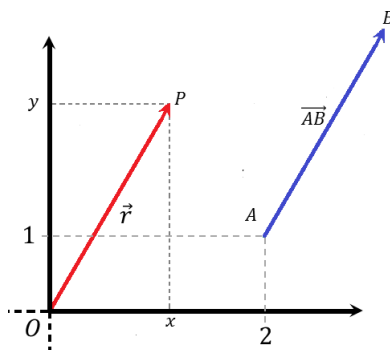


Figura 1.2.4: \overrightarrow{AB} y $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ son representantes del vector $\vec{v} = (x, y) \in V_2$.

Vector nulo:

$\vec{0} = (0, 0) \in V_2$. Se representa mediante un punto en el plano (el punto inicial y el punto final coinciden); en posición canónica es el origen de coordenadas.

Vectores base unitarios o versores básicos en V_2 :

$\vec{i} = (1, 0)$ y $\vec{j} = (0, 1)$. Se representan gráficamente por medio de segmentos orientados de longitud 1, paralelos a los ejes coordenados y apuntando en el sentido positivo de los ejes. En la Figura 1.2.5 se muestran los versores básicos ubicados en posición canónica: \vec{i} es la flecha que va del origen al punto $P_1(1, 0)$, y \vec{j} va del origen a $P_2(0, 1)$.

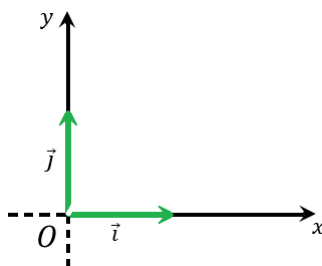


Figura 1.2.5: Versores básicos de V_2 : $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$.

1.2.3 Ejercicios

1. En el escritorio o mesa que utiliza, elija un punto como origen de coordenadas y dos líneas como ejes coordenados. Utilizando como unidad de medida el centímetro:
 - a) Estime las coordenadas de la esquina superior derecha de su hoja o apunte, de la punta de su lapicera o lápiz al escribir sobre la hoja, de su celular (apoyado sobre la mesa).
 - b) Calcule la distancia entre la punta del lápiz y la tecla “e” del celular.
2. En un sistema coordenado bidimensional ubique los puntos $Q(1, 1)$, $R(2, -1)$ y $S(0, -\frac{3}{4})$. Calcule las distancias entre ellos.

3. ¿Qué representa $x = 3$? ¿Y $x \leq 3$? Grafique.
4. Expresé como igualdades o desigualdades los siguientes conjuntos de puntos en el plano:
 - a) los puntos del semiplano inferior;
 - b) los puntos de un corona circular interiores a la circunferencia de radio 5 y exteriores al círculo de radio 3, centrados ambos en el origen;
 - c) los puntos que están a “altura” 3, con la otra coordenada negativa;
 - d) los puntos que distan de $(-1, -2)$ en exactamente 2 unidades;
 - e) el o los puntos, si existen, tales que su proyección en el eje y es el $(0, -\sqrt{3})$.
5. Explique con sus palabras qué regiones del plano representan las siguientes relaciones:
 - a) $x > 0$
 - b) $xy > 0$
 - c) $xy = 0$
 - d) $x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$
 - e) $y - x^2 \geq 0$
6. La ecuación cuadrática $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$ corresponde a una circunferencia. Halle el radio y las coordenadas del centro. Grafique.
7. Grafique y exprese en componentes el vector que va del punto $(3, -5)$ al punto $(4, 7)$ y encuentre su representante en posición canónica. Idem si el punto inicial es $(\frac{3}{2}, \frac{4}{3})$ y el punto final es $(\frac{1}{2}, 3)$.
8. Para los puntos del Ejercicio 2, obtenga \overrightarrow{QR} , \overrightarrow{RS} y \overrightarrow{QS} , y señálelos en el gráfico. ¿Qué puede decir de la orientación relativa de estos vectores?

1.3 Operaciones algebraicas con vectores

La segunda ley de Newton de la mecánica establece que para una partícula de masa M (fija) sometida a varias fuerzas externas, se verifica la ecuación vectorial $\sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = M \vec{a}$, o sea: la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre la partícula es igual al producto de la masa (supuesta constante) por la aceleración. Por otro lado dada una fuerza de magnitud, dirección y sentido constantes, el trabajo que realiza sobre un cuerpo que es desplazado una “pequeña” cantidad \vec{d} se define como $\vec{F}_{\text{cte}} \cdot \vec{d}$, o sea: el producto escalar entre la fuerza (supuesta constante) y el vector desplazamiento (supuesto pequeño); veremos en el Capítulo 6 la definición general de trabajo para una fuerza cualquiera y un desplazamiento arbitrario. Otra cantidad de interés físico es el momento angular definido como $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, o sea: el producto vectorial entre la posición \vec{r} de la partícula y su cantidad de movimiento $\vec{p} = M \vec{v}$, donde \vec{v} indica su velocidad. Aparecen aquí las distintas *operaciones entre vectores*. Recordemos sus definiciones y algunas propiedades.

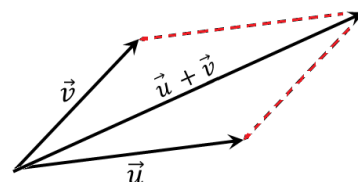
1.3.1 Operaciones de suma y productos

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vectores de V_3 , y sea α el ángulo entre ellos, que toma un valor entre 0 y π . Sea a un número real.

Suma de vectores:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

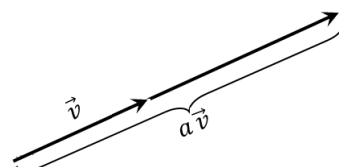
La suma de vectores es un nuevo vector.



Multiplicación de un vector por un número real:

$$a \vec{v} = (av_1, av_2, av_3)$$

Esto da un nuevo vector.





En los siguientes recursos se puede explorar la *regla del paralelogramo* y la *regla del camino* para sumar y restar vectores en forma gráfica.

<https://ggbm.at/Hg7xD3Nu>

<https://ggbm.at/X47eFWqj>

¿Cómo se describe cada procedimiento de suma/resta de vectores según la regla del paralelogramo?

¿Cómo se describe cada procedimiento de suma/resta de vectores según la regla del camino?



En el siguiente recurso se puede explorar la multiplicación de un vector por un número real, en forma gráfica.

<https://ggbm.at/wSDMmqxu>

¿Qué sucede si se multiplica al vector por un número real negativo?

¿Qué sucede si se multiplica al vector por un número real perteneciente al intervalo $(-1, 1)$?

La suma de vectores y la multiplicación de vector por número real permiten expresar un vector como combinación lineal de los versores básicos:

$$\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}.$$

Producto escalar (o producto punto) entre vectores:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

El resultado del producto escalar es un número real, que puede ser positivo, negativo o cero.

Proposición 1.3.1 Algunas propiedades del producto escalar:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (conmutatividad)

b) $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

c) $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$



En el siguiente recurso se puede practicar el cálculo del producto escalar entre dos vectores.

<https://ggbm.at/hUbcuhdf>

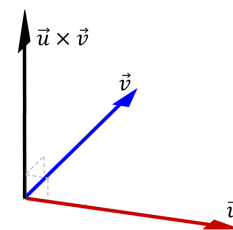
Producto vectorial (o producto cruz) entre vectores:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -u_1 v_3 + u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

El resultado del producto vectorial es un nuevo vector, perpendicular a \vec{u} y a \vec{v} , y en el sentido dado por la *regla de la mano derecha*.

Una forma práctica de calcular el producto vectorial para vectores en el espacio es mediante el determinante de 3×3 :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k}.$$



Proposición 1.3.2 Algunas propiedades del producto vectorial:

a) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ (anticonmutatividad)

b) $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$

c) $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

- Ⓒ Para vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ de V_2 , las operaciones de suma, multiplicación por número real, y producto escalar se definen de manera similar a lo dado para vectores de V_3 . El producto vectorial entre vectores de V_2 , estrictamente no es un vector de V_2 ; sin embargo, dado que en próximos capítulos plantearemos situaciones en 3 dimensiones que también son aplicables a 2 dimensiones, consideraremos el producto vectorial entre los vectores $(u_1, u_2, 0)$ y $(v_1, v_2, 0)$ de V_3 , que da un vector perpendicular al plano xy :

$$(u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + 0\vec{k}) \times (v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + 0\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}.$$



En el siguiente recurso se puede practicar el cálculo del producto vectorial entre vectores. Se pueden comprobar las propiedades anteriores.

<https://ggbm.at/AXy5KDEb>

1.3.2 Módulo de un vector y normalización de un vector

Módulo

Sea $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ un vector de V_3 . El *módulo* (o *norma*) $|\vec{v}|$ del vector \vec{v} está dado por

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

El módulo de un vector es un número real, mayor o igual que cero.¹

El *vector nulo* tiene módulo cero: $|\vec{0}| = 0$ (¡tener en cuenta que $\vec{0}$ y 0 son distintos objetos matemáticos!). Recíprocamente, un vector de módulo cero es necesariamente el vector nulo. Simbólicamente:

$$\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{v}| = 0.$$

Un vector *unitario* es aquel que tiene módulo uno: $|\vec{v}| = 1$.

- **Ejemplo 1.3.1** Dados $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (4, 5, 6)$, hallar la suma y los productos escalar y vectorial entre ambos. Calcular los módulos de los vectores \vec{u} , \vec{v} , $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} \times \vec{v}$.

La suma resulta $\vec{u} + \vec{v} = (1 + 4, 2 + 5, 3 + 6) = 5\vec{i} + 7\vec{j} + 9\vec{k}$; el producto escalar

$$\text{da } \vec{u} \cdot \vec{v} = 4 + 10 + 18 = 32; \text{ y el producto vectorial resulta } \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$(12 - 15)\vec{i} - (6 - 12)\vec{j} + (5 - 8)\vec{k} = -3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Los módulos son: $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$, $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{77}$, $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{5^2 + 7^2 + 9^2} = \sqrt{155}$, y $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{54}$. ■

Normalización

Todo vector no nulo (y no unitario) puede normalizarse, esto es, se puede definir un nuevo vector con la misma dirección y sentido pero de módulo o norma 1. La *normalización* del vector \vec{v} es el *versor* (o vector unitario) \check{v} dado por

$$\check{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \frac{v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \right), \text{ si } \vec{v} \neq \vec{0}.$$

Pruebe que \check{v} es unitario.

¹Recordar que para un número real, $|a|$ denota el valor absoluto de a ; mientras que para un número complejo, $|z|$ denota el *módulo* de z .

Módulos y productos

Multiplicación de un vector por un número real

El módulo del vector $a\vec{v}$ es $|a\vec{v}| = |a| |\vec{v}|$ (que se lee: el módulo de $a\vec{v}$ es igual al valor absoluto de a por el módulo de \vec{v}). Dado un vector \vec{v} , esta operación permite cambiarle la magnitud, y puede o no cambiarle el sentido, pero nunca le altera la dirección. Efectivamente, $a\vec{v}$ es un vector *colineal* con \vec{v} , y tiene el mismo sentido (si $a > 0$) o sentido opuesto (si $a < 0$), o es el vector nulo (si $a = 0$); además la magnitud de $a\vec{v}$ aumenta (si $|a| > 1$), disminuye (si $|a| < 1$), no cambia (si $a = \pm 1$), o se anula (si $a = 0$).

Producto escalar

Se puede escribir como

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha.$$

Esta expresión se puede interpretar como el resultado de multiplicar la magnitud de un vector por la magnitud de la proyección perpendicular del otro vector. Efectivamente en la Figura 1.3.1a) se observa que $|\vec{v}| \cos \alpha$ es la proyección perpendicular de \vec{v} a lo largo de la dirección de \vec{u} ; análogamente, en la Figura 1.3.1b), se observa que $|\vec{u}| \cos \alpha$ es la proyección perpendicular de \vec{u} a lo largo de la dirección de \vec{v} .

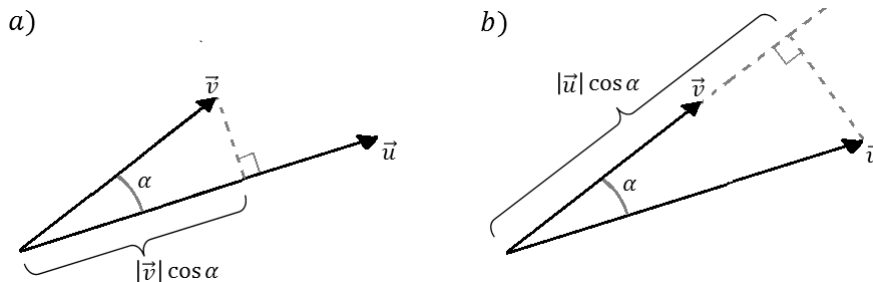


Figura 1.3.1: Proyección perpendicular de un vector a lo largo de la dirección del otro: a) \vec{v} sobre \vec{u} , y b) \vec{u} sobre \vec{v} .

Dos vectores *perpendiculares* tienen producto escalar igual a 0 y se verifica la propiedad:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = \vec{0} \quad \text{o} \quad \vec{v} = \vec{0} \quad \text{o} \quad \vec{u} \perp \vec{v}.$$

Consideremos dos vectores de módulos u y v dados, pero se desconoce la orientación relativa entre ellos. El producto escalar entre los vectores \vec{u} y \vec{v} con esos módulos no puede ser mayor que la cantidad uv (lo que se da cuando los vectores son colineales y de igual sentido: $\alpha = 0$, entonces $\cos \alpha = 1$). Por otro lado, el producto escalar entre los vectores \vec{u} y \vec{v} con los módulos dados no puede ser menor que la cantidad $-uv$ (esto ocurre cuando los vectores son colineales pero con sentidos opuestos: $\alpha = \pi$, entonces $\cos \alpha = -1$). Esta importante propiedad de que el producto escalar entre dos vectores está acotado:

$$-|\vec{u}| |\vec{v}| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| |\vec{v}|,$$

la usaremos más adelante cuando, dado un vector, necesitemos hallar otro vector (de módulo conocido) que haga máximo o mínimo el producto escalar entre ellos. Notar que

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2.$$

Producto vectorial

El módulo del vector $\vec{u} \times \vec{v}$ es

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \operatorname{sen} \alpha.$$

Esta última expresión se puede interpretar como el valor del área de un paralelogramo cuyos lados están determinados por los vectores \vec{u} y \vec{v} , que forman un ángulo α (entre 0 y π) entre ellos. Ver Figura 1.3.2.

El producto vectorial entre dos vectores colineales da como resultado el vector nulo $\vec{0}$; mientras que el producto vectorial entre dos vectores perpendiculares da como resultado un vector cuyo módulo se obtiene multiplicando los módulos de los vectores individuales: $\alpha = \frac{\pi}{2}$, entonces $\sin \alpha = 1$.

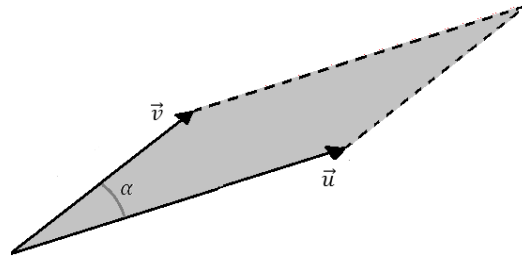


Figura 1.3.2: Interpretación geométrica del módulo del producto vectorial. Paralelogramo determinado por \vec{u} y \vec{v} .

Observar además que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ si y solo si $\vec{u} = \vec{0}$ o $\vec{v} = \vec{0}$ o \vec{u} y \vec{v} son *colineales* (tienen la misma dirección), ya sea con el mismo sentido ($\alpha = 0$) o con sentidos opuestos ($\alpha = \pi$).



En los siguientes recursos se puede explorar cómo utilizar el producto escalar de vectores para determinar la longitud de las proyecciones y cómo utilizar el producto vectorial para calcular áreas de paralelogramos.

<https://ggbm.at/fdApFKbr>

<https://ggbm.at/mVh3KvFr>

■ **Ejemplo 1.3.2** Dados $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (4, 5, 6)$ del Ejemplo 1.3.1, determinar el ángulo α entre ellos.

Para determinar el ángulo entre \vec{u} y \vec{v} podemos usar que, para vectores no nulos, se verifica

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

En este ejemplo resulta $\cos \alpha = \frac{32}{\sqrt{14}\sqrt{77}} \approx 0.974632$. El coseno es muy próximo a 1, luego los vectores forman un ángulo muy pequeño entre sí: $\alpha \approx 0.226 \text{ rad} \approx \frac{72}{1000}\pi$. ■

■ **Ejemplo 1.3.3** Dado un objeto de masa $M = 2 \text{ kg}$ en la ubicación $P(2, -1, 1)$ y con velocidad $\vec{v} = \frac{1}{2}\hat{i} - \hat{k}$ en m/s, hallar: a) la cantidad de movimiento $M\vec{v}$; b) el ángulo que forma este vector con el vector posición \vec{r} y con el vector velocidad; c) el vector momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times (M\vec{v})$. Verificar que \vec{L} es perpendicular a \vec{r} y a $M\vec{v}$.

a) Resulta $M\vec{v} = 2 \left(\frac{1}{2}\hat{i} - \hat{k} \right) = \hat{i} - 2\hat{k} = (1, 0, -2)$ en kg-m/s.

b) Si calculamos el producto escalar entre $M\vec{v} = (1, 0, -2)$ y $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = (2, -1, 1)$, vemos que se anula: $1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 = 2 + 0 - 2 = 0$; luego estos dos vectores son perpendiculares y el ángulo entre ellos resulta $\frac{\pi}{2}$.

El ángulo entre $M\vec{v} = 2\vec{v} = (1, 0, -2)$ y $\vec{v} = (\frac{1}{2}, 0, -1)$ es 0, pues el primero es un múltiplo positivo del segundo.

c) Tenemos $\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \times (\vec{i} - 2\vec{k}) = [(-1)(-2) - 0 \cdot 1]\vec{i} - [2(-2) - 1 \cdot 1]\vec{j} + [2 \cdot 0 - 1(-1)]\vec{k} = (2 - 0)\vec{i} - (-4 - 1)\vec{j} + (0 + 1)\vec{k} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k} = (2, 5, 1)$ en $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$.

Vemos que los siguientes productos escalares se anulan: $\vec{L} \cdot \vec{r} = (2, 5, 1) \cdot (2, -1, 1) = 4 - 5 + 1 = 0$ y $\vec{L} \cdot (m\vec{v}) = (2, 5, 1) \cdot (1, 0, -2) = 2 + 0 - 2 = 0$, lo que indica perpendicularidad en ambos casos.

■

Desigualdad triangular

Se verifica que

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|.$$

Es decir, el módulo del vector suma $\vec{u} + \vec{v}$ es menor o igual que la suma de los módulos de ambos vectores, siendo igual en el caso en que \vec{u} y \vec{v} son colineales y con igual sentido. Interprete gráficamente usando la regla del paralelogramo.

C Para vectores de V_2 el módulo, la normalización y las propiedades de los productos son similares a lo dado para vectores de V_3 .

C En el plano, todo vector unitario $\check{u} = (u_1, u_2)$ es tal que $u_1^2 + u_2^2 = 1$; luego las componentes pueden expresarse en términos del ángulo θ que se forma entre el semieje x positivo y la dirección del vector, en la forma

$$\check{u} = (\cos \theta, \text{sen } \theta).$$

Un vector cualquiera (no necesariamente unitario) $\vec{v} = (v_1, v_2)$ del plano queda determinado por su módulo y el ángulo con el semieje $+x$, en la forma

$$\vec{v} = |\vec{v}| \cdot (\cos \theta, \text{sen } \theta).$$

Por ejemplo, si en un problema de tiro oblicuo la rapidez (= módulo de la velocidad) con que se lanza el proyectil es de 10 m/s a un ángulo de 30° con la horizontal, ¿cuánto valen las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial?

■ **Ejemplo 1.3.4** a) Hallar todos los vectores $\vec{v} \in V_2$ que sean perpendiculares a $\vec{u} = (4, -3)$.
 b) Hallar el o los vectores unitarios $\check{w} \in V_2$ que sean perpendiculares a $\vec{u} = (4, -3)$.

a) Planteamos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, para $\vec{v} = (v_1, v_2)$ a determinar. Luego tenemos una ecuación a resolver: $4v_1 - 3v_2 = 0$, de donde podemos despejar por ejemplo $v_2 = \frac{4}{3}v_1$. Todos los vectores de la forma $\vec{v} = (v_1, \frac{4}{3}v_1)$ con $v_1 \in \mathbb{R}$, esto es múltiplos del vector $(1, \frac{4}{3})$, son perpendiculares a $\vec{u} = (4, -3)$. Graficar.

b) Ahora planteamos que $\vec{u} \cdot \check{w} = 0$, para $\check{w} = (w_1, w_2)$ a determinar, pero siendo \check{w} unitario, es decir que $\sqrt{w_1^2 + w_2^2} = 1$. Luego, tenemos ahora dos ecuaciones a resolver:

$$\begin{cases} 4w_1 - 3w_2 = 0 \\ w_1^2 + w_2^2 = 1 \end{cases}$$

cuya solución es $w_1 = \pm \frac{3}{5}$, $w_2 = \frac{4}{3}w_1 = \pm \frac{4}{5}$. De la familia de vectores perpendiculares a \vec{u} hallada en el inciso a), solamente los dos vectores $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ y $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ son unitarios.

■

■ **Ejemplo 1.3.5** Dado $\vec{u} = (1, 2)$, hallar vectores de módulo $\sqrt{10}$ que sean: a) colineal y con el mismo sentido, b) colineal y con sentido opuesto, c) perpendicular a \vec{u} . Graficar.

a) Debe ser de la forma $a\vec{u}$ con $a > 0$: tenemos que $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, luego $\vec{v} = a\vec{u}$ tiene módulo $|\vec{v}| = |a| |\vec{u}| = a\sqrt{5}$ que debe ser igual a $\sqrt{10}$, de donde $a = \sqrt{2}$. Luego $\vec{v} = \sqrt{2}(1, 2) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

b) El vector opuesto al hallado en a), resuelve este caso: $-\vec{v} = -(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = (-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.

c) Planteamos $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, donde $\vec{w} = (w_1, w_2)$ tiene módulo $\sqrt{10}$. Luego $w_1 + 2w_2 = 0$ y $\sqrt{w_1^2 + w_2^2} = \sqrt{10}$. Este sistema (no lineal) de 2 ecuaciones tiene 2 soluciones posibles: los vectores $\vec{w}_+ = \sqrt{2}(-2, 1)$ y $\vec{w}_- = \sqrt{2}(2, -1)$.

Verifique que cada uno es solución del sistema de ecuaciones planteado. Ver Figura 1.3.3.

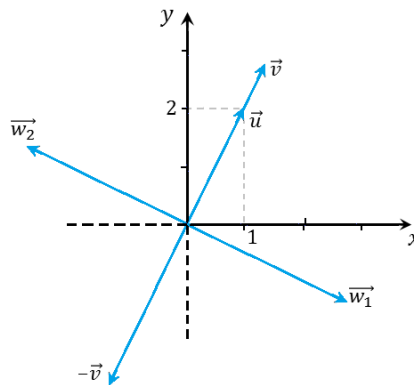


Figura 1.3.3: Ejemplo 1.3.5.

■

1.3.3 Ejercicios

- Pruebe las siguientes propiedades:
 - $|\vec{v}| = 0$ si y sólo si $\vec{v} = \vec{0}$
 - $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si y sólo si $\vec{u} = \vec{0}$ ó $\vec{v} = \vec{0}$ ó $\alpha = \frac{\pi}{2}$
 - $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$
 - $-|\vec{u}| |\vec{v}| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| |\vec{v}|$
- Sea $\vec{v} = (1, 2, 3)$. Calcule el vector opuesto, $\frac{1}{2}$ por el vector y tres veces el vector. Expresé cualquier múltiplo (distinto de cero) de \vec{v} como combinación lineal de los vectores base. Normalice \vec{v} .
- Dados $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (4, 5, 6)$, calcule $3\vec{u} - \vec{v}$, $(2\vec{u}) \cdot \vec{v}$, y $(-\frac{1}{2}\vec{v}) \times \vec{u}$.
 - Dados $\vec{u} = (4, -3)$ y $\vec{v} = (-2, 1)$, calcule $3\vec{u} - \vec{v}$, $(2\vec{u}) \cdot \vec{v}$, y $(-\frac{1}{2}\vec{v}) \times \vec{u}$; grafique los vectores hallados.
- Determine el vector $\vec{v} \in V_2$ cuya magnitud es 4, y tiene la misma dirección y sentido que el vector $\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j}$
- Repase las propiedades de las operaciones de suma de vectores y multiplicación de vector por número real.
 - Pruebe las propiedades enunciadas en esta sección para los productos escalar y vectorial.
- Considere un bloque sobre una mesa, sin fricción. Si se tira del bloque con una soga haciendo una fuerza \vec{F} cuya intensidad es de 10 N (1 Newton=1 kg-m/s²) formando un ángulo de 30° con la horizontal, encuentre las componentes horizontal y vertical de la fuerza. Si también se empuja al bloque del otro lado (para moverlo en el mismo sentido) con una fuerza de igual intensidad pero completamente horizontal, ¿cuánto vale la suma de estas dos fuerzas?
- Sobre una partícula de $\frac{1}{2}$ kg actúan tres fuerzas constantes: \vec{F}_1 hacia abajo de intensidad 1, $\vec{F}_2 = (1, 2)$, y $\vec{F}_3 = -\vec{i} + 4\vec{j}$, todas medidas en N.

- a) ¿Cuál es la fuerza total, neta o *resultante*? ¿Cuánto vale la aceleración de la partícula?
 b) Si la partícula es desplazada desde el origen hasta un punto a 2 mm a la derecha y 1 mm hacia abajo, calcule el trabajo debido a cada una de las fuerzas individuales, y el trabajo total o neto.

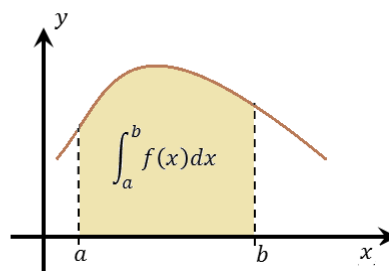
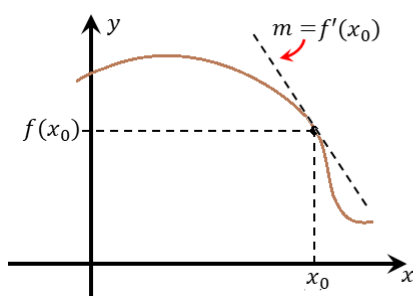
(Considere el problema en 2D. No olvide las unidades al expresar sus resultados.)

1.4 Trabajar en varias dimensiones

La mayoría de las aplicaciones que veremos se refieren a espacios de 2 y 3 dimensiones, e intentaremos en la medida de lo posible interpretar gráficamente el problema. En algunas situaciones físicas, puede ocurrir que una propiedad de un cuerpo dependa de muchas (2, 3 o más) variables que la definen. Por ejemplo, en el campo de la química, la entalpía de un sistema se expresa en términos de la entropía, la presión y el número de partículas de distinto tipo, $H(S, p, \{N_i\})$. En una ecografía 4D se registran señales en función de 3 coordenadas espaciales y 1 temporal.

Muchas definiciones que se dan aquí se extienden de manera natural a n dimensiones (donde n es algún número natural), por ejemplo se puede hablar de puntos $P \in \mathbb{R}^n$ y de vectores $\vec{v} \in V_n$.

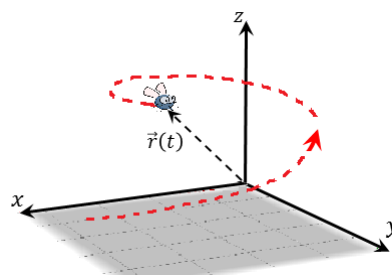
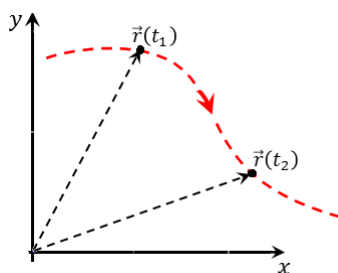
En Análisis Matemático I se trabajó con funciones de *una* variable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde $f(x)$ indica que al número real x se le asigna un número real $f(x)$. Podemos decir que se trabajó en una dimensión. En Análisis Matemático II trabajamos con *una* o con *varias* funciones que dependen de *una* o de *varias* variables, esto es, en varias dimensiones. Los distintos tipos de funciones que estudiaremos por separado en los próximos capítulos son:



FUNCIÓN VECTORIAL DE UN PARÁMETRO (Capítulo 2) $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow V_n$

A un único número real (llamado *parámetro*) se le asigna un vector de 2, 3 o en general n componentes.

- **Ejemplo 1.4.1** La posición $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ de un proyectil en tiro oblicuo, en función del tiempo t ; la velocidad $\vec{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$ de una mosca volando por una habitación, en función del tiempo t .

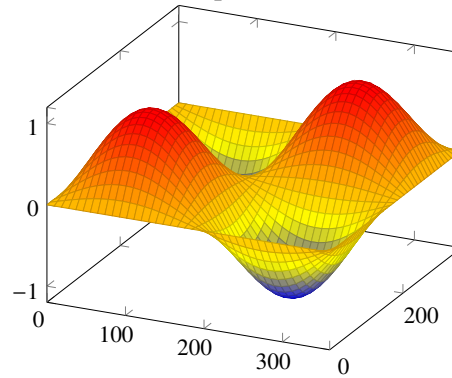
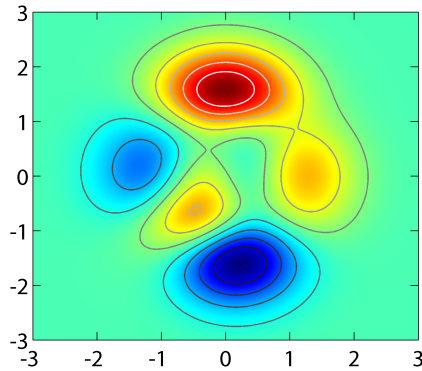


■

FUNCIÓN ESCALAR DE VARIAS VARIABLES (Capítulos 3, 4 y 5) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

A un par, terna o en general n -upla de números reales (llamadas *variables independientes*) se le asigna un único número real.

- **Ejemplo 1.4.2** La temperatura $T(x, y)$ en el punto de coordenadas (x, y) de una placa; la densidad volumétrica de masa $\rho(x, y, z)$ en el punto (x, y, z) de un cuerpo sólido.

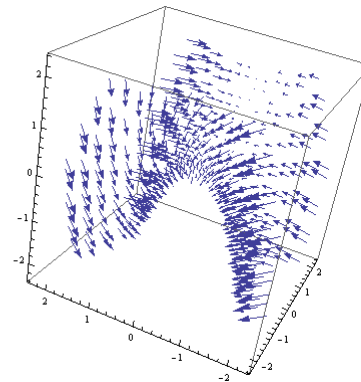
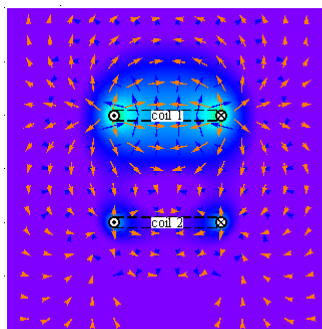


■

CAMPO VECTORIAL (Capítulo 6) $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow V_n$

A una n -upla ($n > 1$) de números reales se le asigna un vector de n componentes.

- **Ejemplo 1.4.3** La velocidad $\vec{V}(x, y) = (V_1(x, y), V_2(x, y))$ en el punto (x, y) de una capa de fluido laminar; el campo eléctrico $\vec{E}(x, y, z) = (E_1(x, y, z), E_2(x, y, z), E_3(x, y, z))$ en un punto (x, y, z) debido a una carga eléctrica puntual.



■

Para estos diferentes tipos de funciones estudiaremos básicamente los mismos conceptos que ya se vieron en Análisis Matemático I: dominio y rango, representación gráfica (cuando sea posible), concepto de límite y continuidad, derivación, puntos críticos y extremos, problemas de optimización, integración, etc. Aunque, como es de imaginar, en Análisis Matemático II hay más variantes que enriquecen el estudio y que permiten describir situaciones como, por ejemplo, el movimiento de objetos en nuestro mundo tridimensional o el cambio de entalpía en un proceso químico dado entre diferentes sustancias.

1.5 Ecuaciones de una recta en el plano y en el espacio

1.5.1 Recta en el plano

Recordemos distintas formas de describir una recta L (no vertical) en el plano xy . Dependiendo de los datos disponibles, podemos usar una de las siguientes formas alternativas:

- la pendiente m y la ordenada al origen b : $y = mx + b$
- dos puntos $P_0(x_0, y_0)$ y $P_1(x_1, y_1)$ (si $y_1 \neq y_0$): $\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$ (ecuación simétrica)
- la pendiente m y un punto $P_0(x_0, y_0)$: $y - y_0 = m(x - x_0)$

Ahora, supongamos que un dato de la recta L con el que contamos es la dirección, que viene dada por cierto vector no nulo del plano, $\vec{v} = (v_1, v_2)$, que denominamos *vector director*. ¿Es suficiente este dato para determinar unívocamente la recta? La respuesta es no, necesitamos además conocer al menos un punto $P_0(x_0, y_0)$ perteneciente a la recta L .

Conociendo \vec{v} y P_0 podemos considerar lo siguiente: para cualquier punto $P(x, y) \in L$, se tiene que el vector $\overrightarrow{P_0P}$, que se puede obtener como $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}$, es colineal con \vec{v} . Luego $\overrightarrow{P_0P}$ debe ser algún múltiplo real t del vector \vec{v} (ver Figura 1.5.1):

$$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = t\vec{v}, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

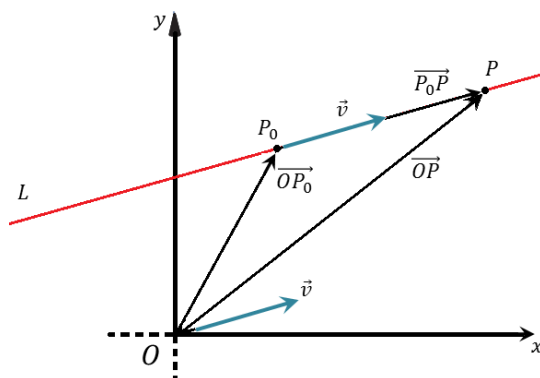


Figura 1.5.1: Recta en el plano xy . El vector $\overrightarrow{P_0P}$ es proporcional al vector director \vec{v} .

Escribiendo $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ y $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r}_0$, resulta una *ecuación vectorial* de la recta:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Notar que ésta es una ecuación vectorial en el plano, que corresponde a dos ecuaciones escalares. Usando que $\vec{r} = (x, y)$ y $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$, podemos escribir esta ecuación en componentes, obteniendo *ecuaciones paramétricas* de la recta:

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Estas ecuaciones dan las coordenadas x e y de cada punto de la recta L en función del *parámetro* t .

- Ⓒ Si eliminamos el parámetro t entre las dos ecuaciones anteriores, recuperamos las formas que ya conocíamos para la ecuación de la recta. Efectivamente, si v_1 y v_2 son ambos distintos de 0, se tiene que t es igual a $\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$, de donde también $y - y_0 = \frac{v_2}{v_1}(x - x_0)$. Se llega a las formas dadas al principio si notamos que $\frac{v_2}{v_1} = \operatorname{tg} \theta = m$, siendo θ la inclinación de \vec{v} respecto del semieje $+x$.

Para completar, veamos la forma de las ecuaciones si una de las dos componentes de \vec{v} es cero:

- Recta vertical: cuando $v_1 = 0$, resulta $x = x_0$;
- Recta horizontal: cuando $v_2 = 0$, resulta $y = y_0$.



En el siguiente recurso es posible explorar cómo se construye gráficamente una recta en el plano y cómo se expresan sus ecuaciones:

<https://ggbm.at/Xk2b84ek>

¿Cuál es la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $P_0(-1, 3)$ y es paralela al vector $\vec{v} = (4, 1)$? Construir esta recta e identificar los puntos que corresponden a los siguientes valores del parámetro: $-1, 0, 0.2, 0.5, 1, 1.5$

Otro recurso interesante es

<https://ggbm.at/CGpr87vf>

¿Cuál es la ordenada al origen de la recta que pasa por el punto $P_0(7, 2)$ y es paralela al vector $\vec{v} = (-4, 2)$?

1.5.2 Recta en el espacio

Una recta L queda determinada por su dirección, dada por algún vector no nulo $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ paralelo a la recta, y por algún punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ perteneciente a la recta. Con estos datos procedemos como antes: para cualquier punto $P(x, y, z) \in L$, se tiene que el vector $\overrightarrow{P_0P}$, que se puede obtener como $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}$, es colineal con \vec{v} . Luego $\overrightarrow{P_0P}$ debe ser algún múltiplo real t del vector \vec{v} (ver Figura 1.5.2):

$$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = t\vec{v}, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

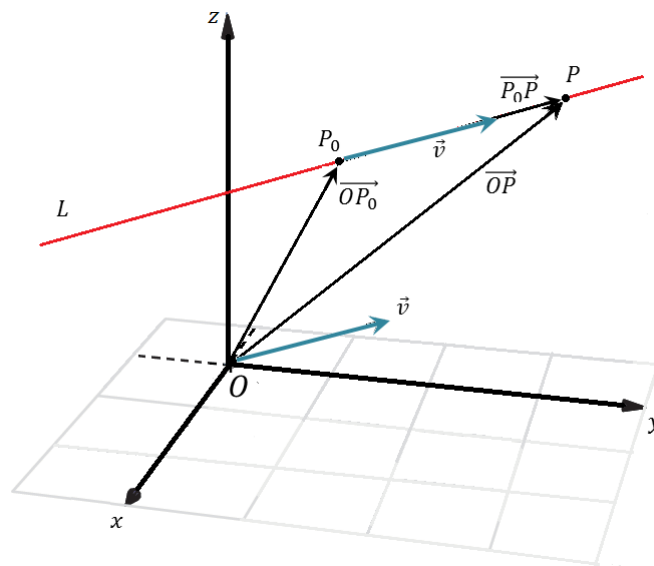


Figura 1.5.2: Recta en el espacio. El vector $\overrightarrow{P_0P}$ es proporcional al vector director \vec{v} .

Escribiendo $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ y $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r}_0$, resulta una *ecuación vectorial* de la recta:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Notar que ésta es una ecuación vectorial en el espacio, que corresponde a tres ecuaciones escalares. Usando que $\vec{r} = (x, y, z)$ y $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, podemos escribir esta ecuación en componentes, obteniendo *ecuaciones paramétricas* de la recta:

$$\begin{cases} x = x_0 + t v_1 \\ y = y_0 + t v_2 \\ z = z_0 + t v_3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Observar que, por construcción, $t = 0$ corresponde al punto P_0 ; $t > 0$ da los puntos de la semirrecta en el mismo sentido de \vec{v} , originada en P_0 ; mientras que $t < 0$ da los puntos de la semirrecta en el sentido de $-\vec{v}$, a partir de P_0 .

El vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es un *vector director* de la recta; observe que ese vector normalizado (unitario), o el vector opuesto, ó $\frac{1}{2}$ por el vector, tres veces el vector, o cualquier otro múltiplo (distinto de cero) de éste, también servirán como vector director de la misma recta.

Eliminando el *parámetro* t entre las tres ecuaciones anteriores, si v_1, v_2 y v_3 son todos distintos de 0, se tienen *ecuaciones simétricas* de la recta:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}.$$

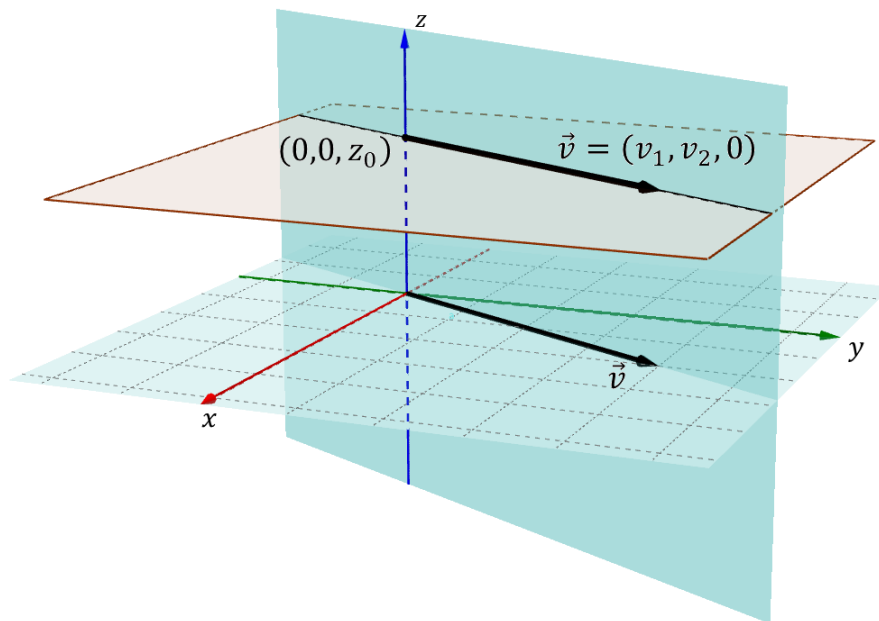
Para completar, veamos la forma de las ecuaciones si una o dos de las componentes de \vec{v} son cero:

Recta paralela a un plano coordenado:

cuando por ejemplo $v_3 = 0$ pero $v_1 \neq 0$ y $v_2 \neq 0$ resulta

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} \\ z = z_0. \end{cases}$$

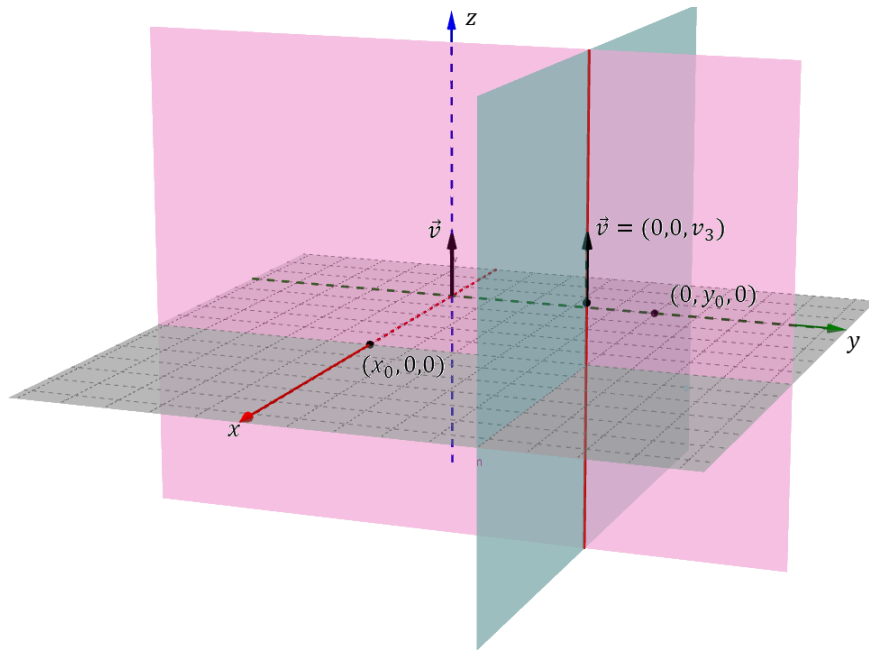
Vemos que cada una de estas dos ecuaciones corresponde, por separado, a un plano vertical y a uno horizontal respectivamente; la intersección entre ambos planos es justamente la recta.



- Recta paralela a un eje coordenado: cuando por ejemplo $v_1 = v_2 = 0$ pero $v_3 \neq 0$, resulta

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

Vemos que cada una de estas dos ecuaciones corresponde, por separado, a un plano vertical (uno paralelo al plano coordenado yz y el otro paralelo a xz); la intersección entre ambos planos es justamente la recta.



Supongamos ahora que los datos disponibles para construir una recta, son dos puntos P_0 y P_1 por los que pasa la recta. Entonces podemos tomar como vector director al $\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$, y resulta

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t(\vec{r}_1 - \vec{r}_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

que es lo mismo que

$$\vec{r} = (1-t)\vec{r}_0 + t\vec{r}_1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Observar que, por construcción, $t = 0$ corresponde al punto P_0 , y $t = 1$ correspondiente a P_1 . Volveremos a estas expresiones en el Capítulo 2, y discutiremos en particular cómo describir no toda la recta sino solamente un segmento de ella (¿podría ser para valores de t entre 0 y 1?).



En el siguiente recurso se pueden manipular los diferentes datos para determinar la ecuación de una recta en el espacio.

<https://ggbm.at/METcXWvC>

- **Ejemplo 1.5.1** Dar ecuaciones paramétricas para la recta L que pasa por el punto $P_0(2, 5, 3)$ y tiene como vector director a $\vec{v} = (0, -1, 0)$. Determinar cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta: $O(0, 0, 0)$, $A(2, 2, 2)$, $B(3, 3, 3)$, $C(2, 0, 3)$.

Un punto P cualquiera de la recta tiene coordenadas (x, y, z) tales que

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = (2\check{i} + 5\check{j} + 3\check{k}) + t(0\check{i} - 1\check{j} + 0\check{k}) = 2\check{i} + (5-t)\check{j} + 3\check{k}$$

para algún $t \in \mathbb{R}$. Escribimos entonces para las componentes:

$$\begin{cases} x = 2 + t \cdot 0 \\ y = 5 + t(-1) \\ z = 3 + t \cdot 0. \end{cases}$$

Luego, encontramos las siguientes ecuaciones paramétricas para L :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 \end{cases}$$

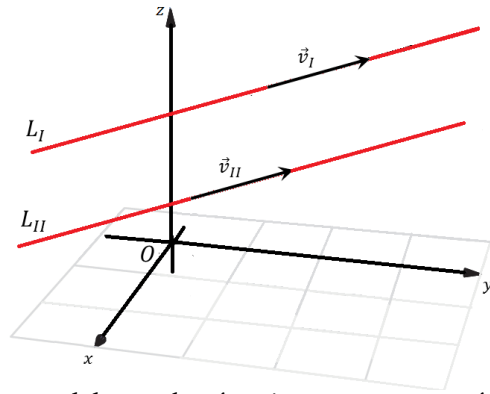
Notar que, en este ejemplo, los puntos de L tienen sus componentes x, z fijas, mientras que la componente y toma todos los valores reales: la recta L es paralela al eje y .

El punto C pertenece a la recta, pues verifica las ecuaciones $x = 2, y = 0$ (cuando $t = 5$), $z = 3$; pero la recta no pasa por O ni por A ni B (justifique y grafique).

■

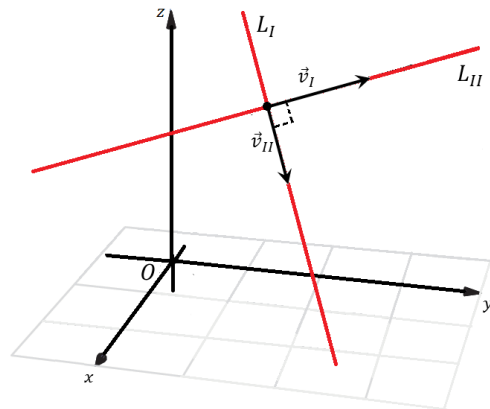
Orientaciones relativas de dos rectas en el espacio

Rectas paralelas: $L_I \parallel L_{II}$ cuando $\vec{v}_I \parallel \vec{v}_{II}$. Una forma de detectar paralelismo de rectas es calcular el producto vectorial entre sus vectores directores (¿cómo?).

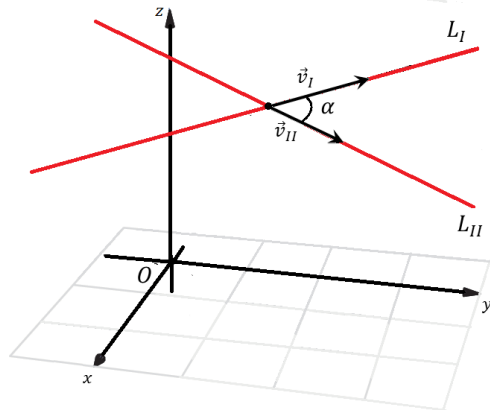


Rectas coincidentes: L_I coincide con L_{II} cuando son paralelas y además existe un punto común a ambas (de hecho, todos sus puntos son comunes).

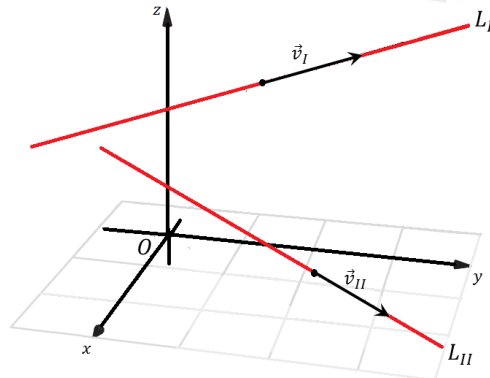
Rectas perpendiculares (u ortogonales): $L_I \perp L_{II}$ cuando $\vec{v}_I \perp \vec{v}_{II}$ y las rectas se cortan en un punto. Una forma de detectar perpendicularidad de rectas es calcular el producto escalar entre los vectores directores (¿cómo?).



Rectas oblicuas: dos rectas que se cortan en un punto, forman un *ángulo* agudo entre ellas que está dado por $\cos \alpha = \frac{|\vec{v}_I \cdot \vec{v}_{II}|}{|\vec{v}_I| |\vec{v}_{II}|}$.



Rectas albeadas: se denomina así a dos rectas que no son paralelas ni se intersectan en el espacio (fabríquelas utilizando un par de lapiceras).



1.5.3 Ejercicios

1. Dé ecuaciones apropiadas que representen cada uno de los 3 ejes coordenados.
2. Tome un objeto con forma de cubo y marque una de las 12 aristas. Señale todas las aristas que, respecto de la marcada, sean: a) paralelas, b) perpendiculares, y c) alabeadas.
3. Para el sistema de coordenadas del aula que fijó en el Ejercicio 1 de la Sección 1.1, escriba ecuaciones que representen la recta que contiene al lado inferior del pizarrón.
4. Pruebe justificadamente que las ecuaciones paramétricas $x = 1 + 2t, y = -2 + 4t, z = 4 - 4t$ con $t \in \mathbb{R}$, y las ecuaciones simétricas $2(x - 3) = (y - 2) = -z$ describen la misma recta.
5. Escriba ecuaciones para la recta que pasa por el punto $(-2, 3, 1)$ y es paralela al vector $(4, 0, -1)$. ¿Cuáles de los puntos pertenecen a la recta: $A(2, 3, 0), B(-6, 3, 2), C(2, 1, 0), D(6, 3, -2)$?
6. ¿Qué recta es paralela al vector que une los puntos $P_0(1, 0, 1)$ y $P_1(1, 3, -2)$, y pasa por el origen? ¿Pertenecen P_0 ó P_1 a esa recta? Explique.
7. Dadas las rectas determinadas por las ecuaciones $x = 3 + 2t, y = -2 + 5t, z = 1 - t$ con $t \in \mathbb{R}$, y $x = 7 - 2s, y = 8 + s, z = -1 + 2s$ con $s \in \mathbb{R}$, halle (si existe) el punto de intersección entre ambas rectas. ¿Para qué valor de t y de s se obtiene dicho punto?

1.6 Ecuaciones de un plano en el espacio

1.6.1 Plano en el espacio

Un plano Π queda determinado por su inclinación u orientación espacial, dada por algún vector no nulo $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ perpendicular o “normal” al plano, y por algún punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ perteneciente al plano. Con estos datos podemos considerar lo siguiente: para cualquier punto $P(x, y, z) \in \Pi$, se tiene que el vector $\overrightarrow{P_0P}$, que se puede obtener como $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}$, está contenido en el plano y por lo tanto debe ser perpendicular al vector \vec{n} . Entonces (ver Figura 1.6.1):

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = \vec{n} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = 0.$$

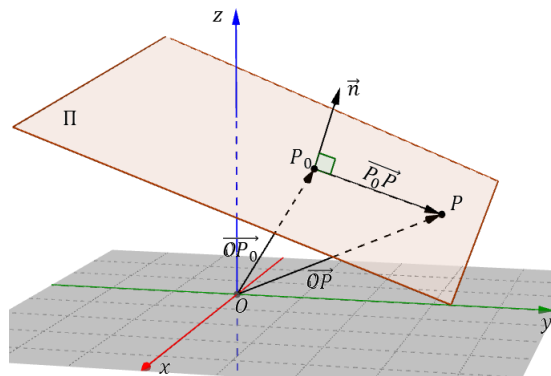


Figura 1.6.1: Plano en el espacio. El vector $\overrightarrow{P_0P}$ es perpendicular al vector normal \vec{n} .

Escribiendo $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ y $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r}_0$, resulta una ecuación “vectorial” del plano:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0.$$

Notar que ésta es una única ecuación escalar, pero expresada en términos de vectores, de ahí su nombre. Usando que $\vec{r} = (x, y, z)$ y $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y desarrollando el producto escalar, obtenemos una ecuación “escalar” del plano:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0.$$

El vector $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ es un vector normal al plano; observe que ese vector normalizado, o el vector opuesto, ó $\frac{1}{2}$ por el vector, tres veces el vector, o cualquier otro múltiplo (distinto de cero) de éste, también servirán como vector normal al mismo plano.

A partir de la expresión anterior, se obtiene una *ecuación “lineal”* del plano:

$$n_1x + n_2y + n_3z = n_0$$

donde $n_0 = n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0$ (compruébelo). Notar que la ecuación dada es lineal en las variables x, y, z , de ahí su nombre.

- C Si un plano contiene al origen, su ecuación debe ser de la forma $n_1x + n_2y + n_3z = 0$, o sea con el término constante n_0 igual a 0 (justifique).

Otra forma de escribir una ecuación de un plano surge de despejar una de las variables en términos de las otras dos. Por ejemplo, un plano no vertical (esto es, para $n_3 \neq 0$) admite una ecuación de la forma

$$z = m_1x + m_2y + b$$

Ejercicio Muestre que un vector normal al plano es $\vec{m} = (-m_1, -m_2, +1)$. Observe que \vec{m} “apunta hacia arriba”.

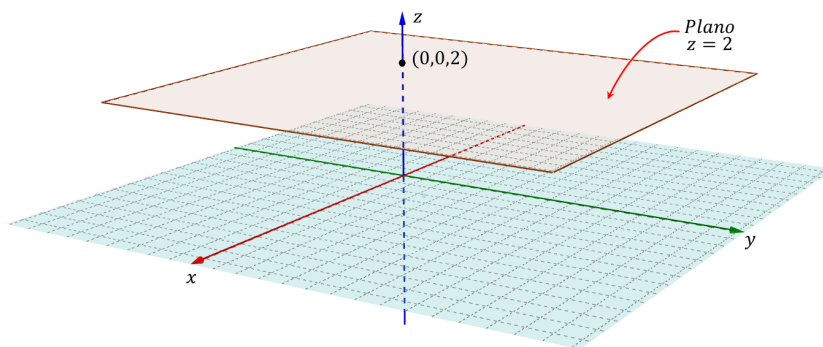
Un procedimiento útil para graficar un plano es:

- ver dónde corta a los ejes coordenados: para obtener la intersección del plano con el eje x hacemos $y = 0, z = 0$ en la ecuación del plano; para obtener la intersección con el eje y , hacemos $x = 0, z = 0$ en la ecuación del plano; y para obtener la intersección con el eje z , hacemos $x = 0, y = 0$ en la ecuación del plano;
- ver dónde corta a los planos coordenados: para obtener la intersección con el plano xy hacemos $z = 0$; para obtener la intersección con el plano xz hacemos $y = 0$; para obtener la intersección con el plano yz hacemos $x = 0$.

■ **Ejemplo 1.6.1** Graficar los siguientes planos: a) $z = 2$, b) $x = 1$, c) $y = -1$. Hallar un vector normal en cada caso.

- a) Para graficar el plano $z = 2$ vemos que no posee intersección con los ejes coordenados x e y , y que interseca al eje coordenado z en $(0, 0, 2)$.

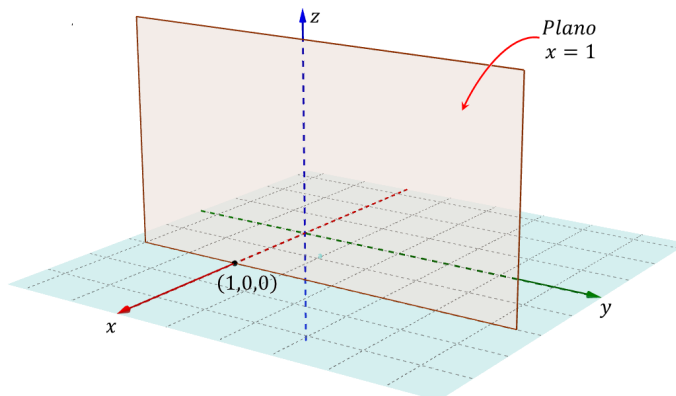
La intersección con el plano xy se obtiene fijando $z = 0$ lo que da como resultado que no hay intersección, es decir el plano $z = 2$ no corta al plano coordenado xy . La intersección con el plano yz da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $z = 2, x = 0$. La intersección con el plano xz da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $z = 2, y = 0$. El vector $\vec{k} = (0, 0, 1)$ es normal al plano $z = 2$.



- b) Para graficar el plano $x = 1$ vemos que no posee intersección con los ejes coordenados y y z , y que interseca al eje coordenado x en $(1, 0, 0)$.

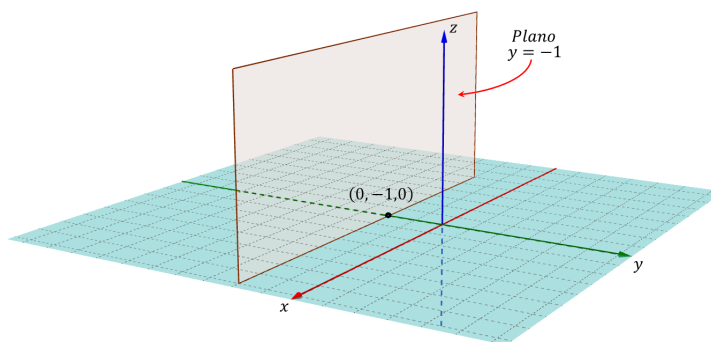
La intersección con el plano xy da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $z = 0, x = 1$. La intersección con el plano coordenado yz da como resultado que no hay intersección, es decir el plano $x = 1$ no corta al plano yz . La intersección con el plano xz da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $x = 1, y = 0$. El vector

$\vec{i} = (1, 0, 0)$ es normal al plano $x = 1$.



- c) Para graficar el plano $y = -1$ vemos que no posee intersección con los ejes coordenados x y z , y que interseca al eje coordenado y en $(0, -1, 0)$.

La intersección con el plano xy da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $z = 0, y = -1$. La intersección con el plano yz da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $x = 0, y = -1$. La intersección con el plano coordenado xz da como resultado que no hay intersección, es decir el plano $y = -1$ no corta al plano coordenado xz . El vector $\vec{j} = (0, 1, 0)$ es normal al plano $y = -1$.

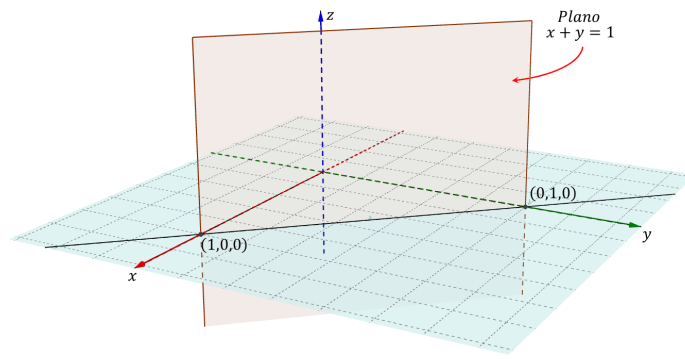


■

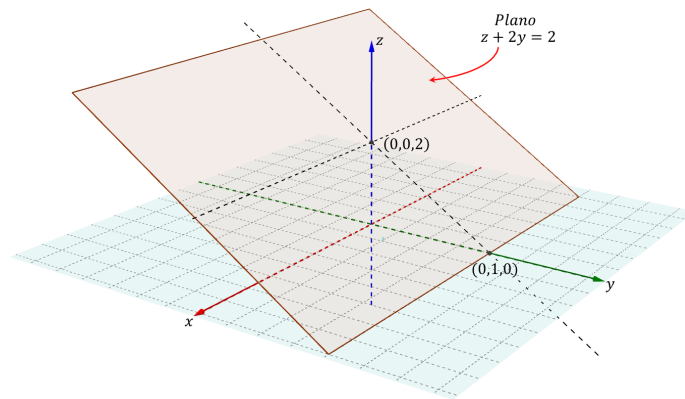
Las ecuaciones cartesianas de los planos del ejemplo anterior poseen dos variables ausentes y son planos paralelos a alguno de los planos coordenados.

■ **Ejemplo 1.6.2** Graficar los siguientes planos: a) $x + y = 1$, b) $z + 2y = 2$, c) $x + 2z = 1$. Dar un vector normal en cada caso.

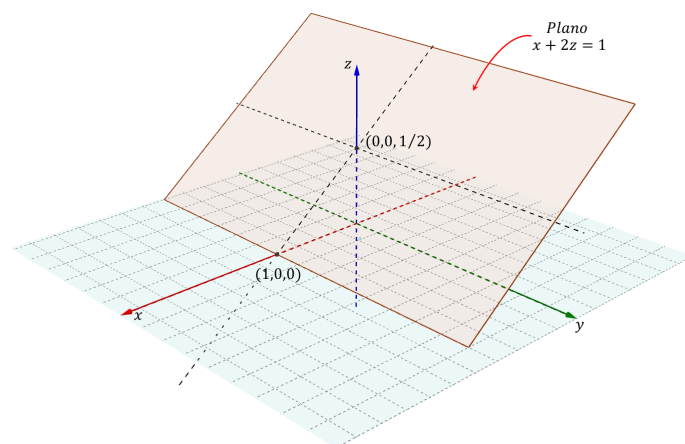
- a) La intersección del plano $x + y = 1$ con el eje x se obtiene haciendo $y = 0, z = 0$ en la ecuación del plano, luego $x = 1$; entonces el punto $P(1, 0, 0)$ es un punto del eje x y del plano dado. Para obtener la intersección con el eje y , hacemos $x = 0, z = 0$ en la ecuación del plano, luego $y = 1$; entonces $Q(0, 1, 0)$ es un punto del eje y y del plano. Para obtener la intersección con el eje z , hacemos $x = 0, y = 0$ y vemos que no hay intersección, es decir, el plano $x + y = 1$ no corta al eje coordenado z . La intersección con el plano xy da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $x + y = 1, z = 0$. La intersección con el plano yz da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $y = 1, x = 0$. La intersección con el plano xz da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $x = 1, y = 0$. El vector $(1, 1, 0)$ es normal al plano.



- b) Al buscar la intersección del plano $z + 2y = 2$ con los ejes coordenados obtenemos que el plano no posee intersección con el eje coordenado x , y que los puntos $P(0, 1, 0)$ y $Q(0, 0, 2)$ son su intersección con el eje y y el eje z , respectivamente. La intersección con el plano xy da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $y = 1, z = 0$. La intersección con el plano yz da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $z + 2y = 2, x = 0$. La intersección con el plano xz da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $z = 2, y = 0$. El vector $(0, 2, 1)$ es normal al plano.



- c) Al buscar la intersección del plano $x + 2z = 1$ con los ejes coordenados obtenemos que el plano no posee intersección con el eje coordenado y , y que el punto $P(1, 0, 0)$ es un punto del eje x y del plano dado y el punto $Q(0, 0, \frac{1}{2})$ es un punto del eje z y del plano. La intersección con el plano xy da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $x = 1, z = 0$. La intersección con el plano yz da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $z = \frac{1}{2}, x = 0$. La intersección con el plano xz da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $x + 2z = 1, y = 0$. El vector $(1, 0, 2)$ es normal al plano.



Las ecuaciones cartesianas de los planos del ejemplo anterior poseen una variable ausente y son planos “generados” por la recta determinada por las variables presentes.

- **Ejemplo 1.6.3** Graficar el plano de ecuación $2x + 3y + 4z = 12$. Hallar un vector normal a dicho plano. Determinar cuáles de los siguientes puntos pertenecen al plano: $A(10, -\frac{10}{3}, \frac{1}{2})$, $B(10, -\frac{10}{3}, 2)$, $C(5, 5, 5)$, $D(1, 1, \frac{7}{4})$.

Para obtener la intersección del plano con el eje x , hacemos $y = 0, z = 0$ en la ecuación del plano, luego $2x + 0 + 0 = 12$; entonces el punto $P(6, 0, 0)$ es un punto del eje x y del plano dado. Para obtener la intersección con el eje y , hacemos $x = 0, z = 0$ en la ecuación del plano, luego $0 + 3y + 0 = 12$; entonces $Q(0, 4, 0)$ es un punto del eje y y del plano. Para obtener la intersección con el eje z , hacemos $x = 0, y = 0$ en la ecuación del plano, luego $0 + 0 + 4z = 12$; entonces $R(0, 0, 3)$ es un punto del eje z y del plano dado.

La intersección con el plano xy se obtiene fijando $z = 0$, lo que da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $2x + 3y = 12, z = 0$. La intersección con el plano yz se obtiene fijando $x = 0$, lo que da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $3y + 4z = 12, x = 0$. La intersección con el plano xz se obtiene fijando $y = 0$, lo que da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $2x + 4z = 12, y = 0$.

En la Figura 1.6.2 se muestra sólo la parte del plano en el primer octante: el triángulo cuyos vértices son los puntos P, Q, R , y cuyos lados $\overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{RS}$ pertenecen a las rectas mencionadas. Comparando la ecuación del plano dado con la forma general, vemos que un vector normal al plano es $\vec{n} = (2, 3, 4)$, o cualquier múltiplo no nulo de éste. El punto A satisface la ecuación del plano, pues se verifica que $2 \cdot 10 + 3 \cdot (-\frac{10}{3}) + 4 \cdot \frac{1}{2} = 12$; el punto D también, no así B ni C (justifique y grafique).

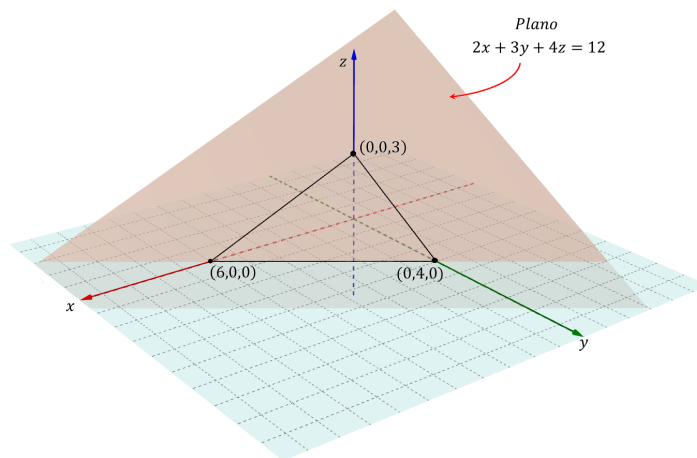


Figura 1.6.2: Se muestra la porción que se ve en el primer octante. ■



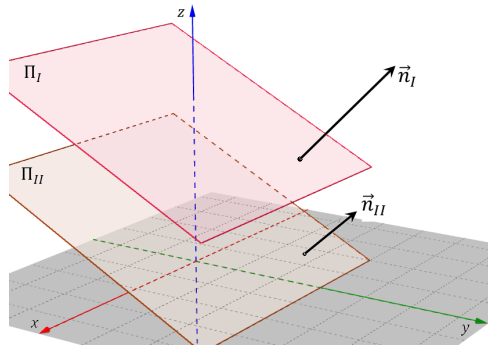
Todos los ejemplos anteriores pueden trabajarse y visualizarse en los siguientes recursos:

<https://ggbm.at/sSTvtwDS>

<https://ggbm.at/dTkg5Nws>

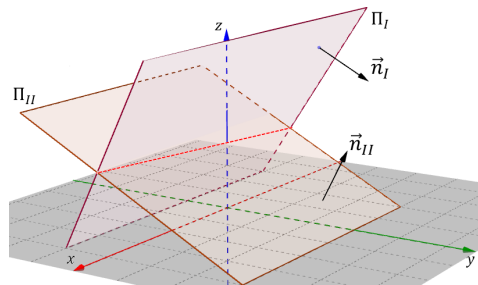
Orientaciones relativas de dos planos en el espacio

Planos paralelos: $\Pi_I \parallel \Pi_{II}$ cuando $\vec{n}_I \parallel \vec{n}_{II}$.

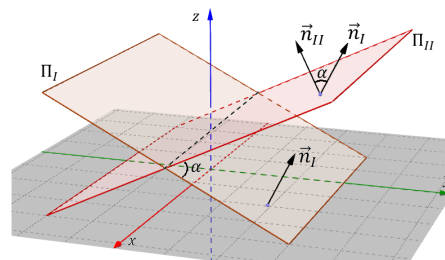


Planos coincidentes: Π_I coincide con Π_{II} cuando son paralelos y además existe un punto común a ambos (de hecho, todos sus puntos son comunes).

Planos perpendiculares (u ortogonales): $\Pi_I \perp \Pi_{II}$ cuando $\vec{n}_I \perp \vec{n}_{II}$.



Planos oblicuos: dos planos no paralelos se intersectan en una recta, y forman un ángulo agudo entre ellos tal que $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_I \cdot \vec{n}_{II}|}{|\vec{n}_I| |\vec{n}_{II}|}$.



1.6.2 Ejercicios

1. Dé ecuaciones apropiadas que representen cada uno de los 3 planos coordenados.
2. Tome un objeto con forma de cubo y marque una de las 6 caras. Señale todas las caras que, respecto de la marcada, sean: a) paralelas, y b) perpendiculares.
3. Para el sistema de coordenadas del aula que fijó en el Ejercicio 1 de la Sección 1.1, escriba una ecuación que represente el plano del techo del aula.
4. Indique una manera de determinar analíticamente si: a) dos planos son paralelos, b) dos planos son perpendiculares, c) una recta es perpendicular a un plano.
5. Halle una ecuación para el plano que pasa por el punto $P_0(3, 2, 2)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = (2, 3, -1)$. ¿Contiene este plano al origen? Explique.
6. Halle una ecuación para el plano que es paralelo al plano $2x - y + z = 4$ y pasa por el punto $P_0(1, 2, 3)$.

1.7 Otras superficies en el espacio

1.7.1 Superficies cuádricas

Las llamadas *superficies cuádricas* en el espacio corresponden a la gráfica de una ecuación de grado 2 en x , y , z , dada en general por

$$c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2 + c_4xy + c_5yz + c_6xz + c_7x + c_8y + c_9z + c_{10} = 0.$$

Dependiendo de los signos y valores relativos de los coeficientes constantes c_1, c_2, \dots, c_9 y c_{10} , las cuádricas se clasifican en 6 tipos.

Veamos cuáles son las expresiones y gráficas características de cuatro de esos tipos de cuádrica, que utilizaremos en esta asignatura. Por simplicidad, ubicamos estas superficies en *forma canónica*, esto es con el *centro* o el *vértice* en el origen de coordenadas, y con los *ejes de simetría* a lo largo de los ejes coordenados (aquí tomamos a lo largo del eje z).

Para obtener la representación gráfica de una superficie es útil dibujar familias de **trazas**, que son curvas que resultan de la intersección entre la superficie dada y planos paralelos a los planos coordenados. Las ecuaciones de las trazas se obtienen fijando $x = l$ ó $y = m$ ó $z = n$ en las ecuaciones de las superficies.

Elipsoide y superficie esférica

La ecuación típica de un elipsoide es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

donde a, b, c (constantes positivas) son los *semiejes*. Tiene *centro* en $C(0, 0, 0)$, pero no contiene al origen. Las intersecciones con los planos coordenados son elipses, al igual que todas las trazas siempre que $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $|z| \leq c$. Una característica que la distingue de las otras cuádricas es que se trata de una superficie *cerrada*. Ver Figura 1.7.1.

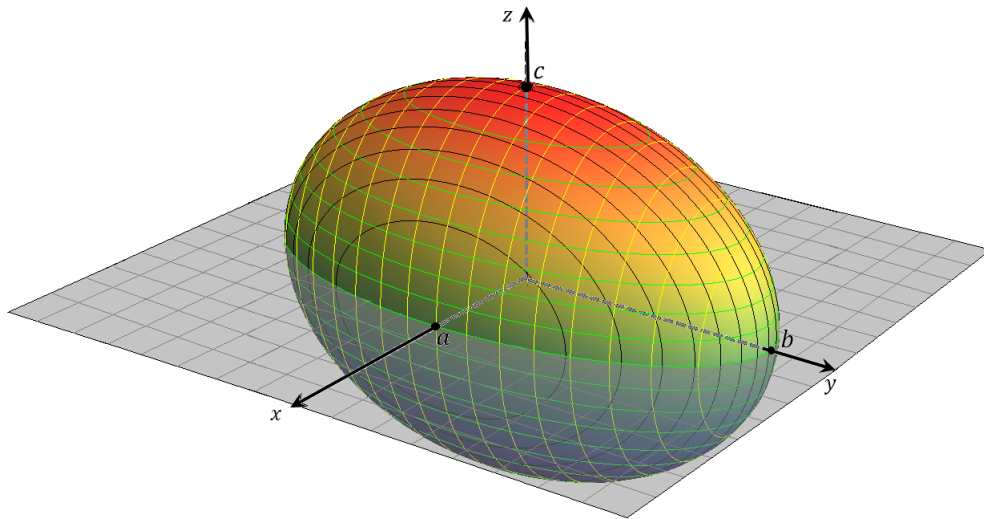


Figura 1.7.1: Elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Un caso particular de elipsoide es cuando $a = b = c$ y denomina *superficie esférica*:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

En este caso particular, las trazas son circunferencias.

■ **Ejemplo 1.7.1** Una lenteja, una pelotita de ping-pong, una pelota de rugby, nuestro planeta tienen forma de elipsoide. Los semiejes de la Tierra miden 6356,523 km (del centro a los polos) y 6378,137 km (del centro a puntos en el Ecuador); las trazas perpendiculares al eje Norte–Sur son los paralelos terrestres (por ejemplo, La Plata está sobre la traza que corresponde a una latitud de $-35^{\circ}10'$); interprete el meridiano de Greenwich como una traza (¿los demás meridianos serán trazas también?).

Otro ejemplo: $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$ puede reescribirse como $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$, luego es la superficie del elipsoide de semiejes 3,2,1 centrado en el origen.

■

Cono elíptico y cono circular

La ecuación típica de un cono elíptico de eje z es

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

donde a y b son constantes positivas.

Las intersecciones con los planos coordenados paralelos al eje del cono (esto es, los planos xz e yz) son dos rectas que se cortan en el *vértice* $V(0, 0, 0)$, y la intersección con el plano perpendicular al eje del cono es solamente el punto V . Las trazas en planos paralelos al eje z son dos hipérbolas, y en planos perpendiculares al eje z son elipses. Es una superficie *abierta*. Ver Figura 1.7.2.

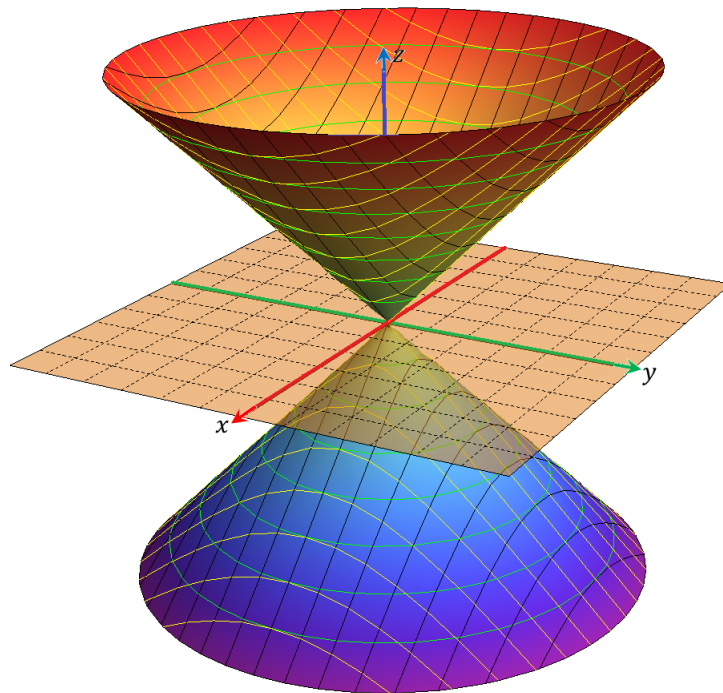


Figura 1.7.2: Cono elíptico $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

Un caso particular de cono elíptico es cuando $a = b$. Se denomina *cono circular* o *cono de revolución*:

$$z^2 = \frac{1}{a^2} (x^2 + y^2).$$

En este caso particular, las trazas que se obtienen en planos perpendiculares al eje z son circunferencias.



Al cortar (seccionar) la superficie de un cono con planos de distinta inclinación se obtienen: rectas, elipses o circunferencias, parábolas, e hipérbolas. De aquí que estas curvas reciban el nombre de “secciones cónicas”.

Inspeccioná el siguiente recurso:

<https://ggbm.at/k8uchZHK>

■ **Ejemplo 1.7.2** Dos cucuruchos enfrentados por sus vértices forman un cono.

Otro ejemplo: $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ consta de “dos medios conos”, con $z = \pm 2\sqrt{x^2 + y^2}$. ■

Paraboloide elíptico y paraboloide circular

La ecuación típica de un paraboloide elíptico de *eje z* es

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

donde a y b son constantes positivas, y c es una constante real no nula.

Las intersecciones con los planos coordenados paralelos al eje del paraboloide son parábolas con *vértice* $V(0, 0, 0)$, y la intersección con el plano perpendicular al eje del paraboloide es solamente el punto V . Las trazas en planos paralelos al eje del paraboloide son parábolas con ramas hacia arriba (si $c > 0$) o hacia abajo (si $c < 0$); las trazas en planos perpendiculares son elipses. Es una superficie *abierta*. Ver Figura 1.7.3.

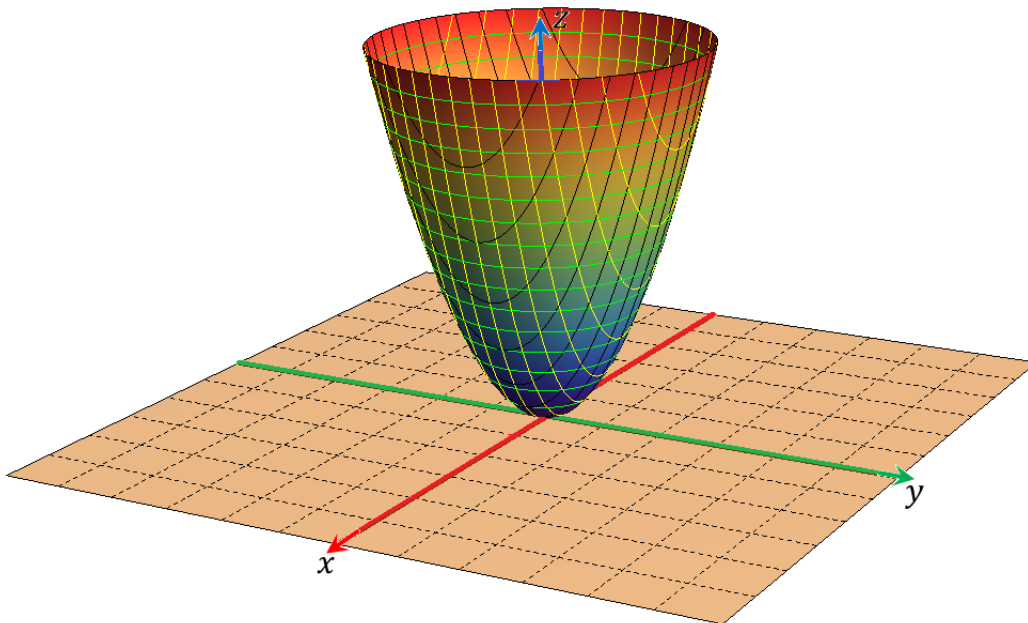


Figura 1.7.3: Paraboloide elíptico $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, para $c > 0$.

Un caso particular de paraboloide elíptico es cuando $a = b$, y se denomina *paraboloide circular* o paraboloide *de revolución*:

$$z = \frac{c}{a^2}(x^2 + y^2).$$

En este caso particular, las trazas que se obtienen en planos perpendiculares al eje z son circunferencias.



Con el siguiente recurso se pueden explorar las trazas de distintos paraboloides elípticos cambiando la ecuación correspondiente:

<https://ggbm.at/pm28sQQQ>

- **Ejemplo 1.7.3** La superficie de un fluido que está girando (por ejemplo al revolver el café en la taza), una antena de TV satelital, los espejos de los telescopios tienen forma de paraboloides elípticos.

Otros ejemplos: $z = 4(x^2 + y^2)$ y $z = -4(x^2 + y^2)$. ¿Cuál es la diferencia entre ellos? ■

Paraboloide hiperbólico

La ecuación típica de un paraboloide hiperbólico de *eje z* es de la forma

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

donde a y b son constantes positivas y c es una constante no nula.

Si $c > 0$: la intersección con el plano coordenado xz es una parábola con ramas hacia arriba y vértice $V(0, 0, 0)$, mientras que con el plano coordenado yz es otra parábola con ramas hacia abajo; la intersección con el plano coordenado perpendicular al eje z son dos rectas que se cortan en V . Las trazas en planos paralelos al eje z son parábolas (con ramas hacia arriba en $y = m$, o ramas hacia abajo en $x = l$), y las trazas en planos perpendiculares al eje z son hipérbolas. Es una superficie abierta. El punto V recibe el nombre de *punto silla* o *punto de ensilladura*. Ver Figura 1.7.4.

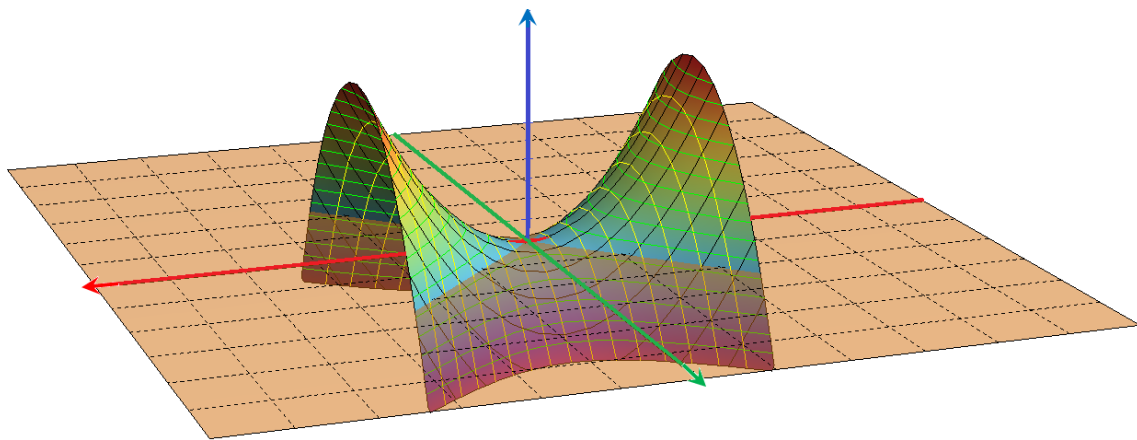


Figura 1.7.4: Paraboloide hiperbólico $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, para $c > 0$.



Con el siguiente recurso se pueden explorar las trazas de distintos paraboloides hiperbólicos cambiando la ecuación correspondiente:

<https://ggbm.at/ThEzy96j>

- **Ejemplo 1.7.4** Una silla de montar a caballo tiene forma de paraboloide hiperbólico (de ahí el nombre para el punto V), también unas conocidas papas fritas de tubo, un lomo de burro muy gastado por el tránsito.

Otros ejemplos: $z = 4(x^2 - y^2)$ y $z = 4(y^2 - x^2)$. ¿Cuál es la diferencia entre estas superficies? ■

Como mencionamos, hemos dado las formas canónicas de las cuádricas presentadas. Podemos encontrarnos con una superficie que tenga alguna de estas formas pero que tenga su eje en otra dirección que no sea el eje z ; o su vértice o centro en otro punto que no sea el origen. Algunos ejemplos (justifique, comparando con las formas canónicas): $x^2 = 3y^2 + 4z^2$ es un cono elíptico de eje x ; $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$ es la superficie esférica de radio 3 centrada en el punto $(0, 1, 2)$; $(z - 1)^2 = x^2 + y^2$ corresponde a un cono con vértice $(0, 0, 1)$ (¿con qué orientación?); el paraboloides $z = 16 - x^2 - y^2$ abre hacia abajo, con vértice en $(0, 0, 16)$.

Ejercicio En parejas, propongan ecuaciones cuadráticas e identifiquen qué cuádrica representa (esbocen la gráfica a mano alzada).

- **Ejemplo 1.7.5** Clasificar y graficar la superficie de ecuación $x^2 - y^2 + z^2 = 0$. Determinar cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la superficie: $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(1, 1, 1)$, $C(1, 2, 1)$, $D(3, 5, 4)$, $E(-3, -5, -4)$.

La ecuación de la superficie puede reescribirse como $y^2 = x^2 + z^2$. Notamos que no hay término constante, que las 3 variables están elevadas al cuadrado, y que dos llevan el mismo signo, luego se trata de una superficie cónica. Tiene eje y . Podemos agregar, además, que se trata de un cono circular dado que los coeficientes de las variables x y z son iguales (valen 1). Las trazas perpendiculares al eje y se obtienen fijando $y = \text{constante}$, o sea son las circunferencias de la forma

$$\begin{cases} y = m \\ x^2 + z^2 = m^2 \end{cases}$$

para cada $m \in \mathbb{R}$ (notar que si $m = 0$ se reduce a un punto). Las trazas en $x = l$ y en $z = n$ son hipérbolas.

Los puntos O , A , D y E satisfacen la ecuación del cono dado, mientras que los puntos B y C no pertenecen a la gráfica, pues (por ejemplo) $1^2 - 1^2 + 0^2 = 0$ se verifica para A , mientras que para C no: $1^2 - 2^2 + 1^2 \neq 0$. ■

1.7.2 Superficies cilíndricas generales

Veamos algunos ejemplos de las llamadas superficies cilíndricas.

El conjunto de puntos en el espacio que satisface la ecuación

$$x^2 + y^2 = 2$$

sin aclarar nada acerca de los valores que puede tomar z , genera el *cilindro circular recto* de eje z y radio $\sqrt{2}$ (se puede pensar como una sucesión de circunferencias apoyadas una encima de otra, para todo z). Por ejemplo, un tubo de rollo de cocina (infinitamente largo) tiene esta forma (midiendo las longitudes en centímetros).

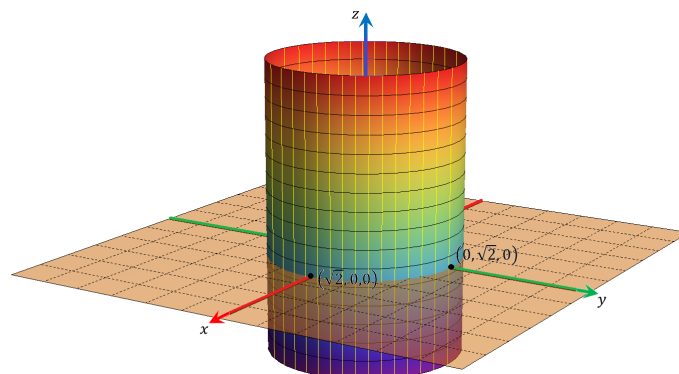


Figura 1.7.5: Cilindro circular de ecuación $x^2 + y^2 = 2$.

Otro ejemplo es la ecuación

$$y = x^2.$$

En este caso, los puntos de la forma (x, x^2, c) generan en el plano $z = c$ una parábola de eje y y ramas hacia $+y$; tomando todos los valores reales de c se genera un *cilindro parabólico*. ¿Cuál es la diferencia con la superficie de ecuación $z = y^2$? ¿Y con $z = x^2$?

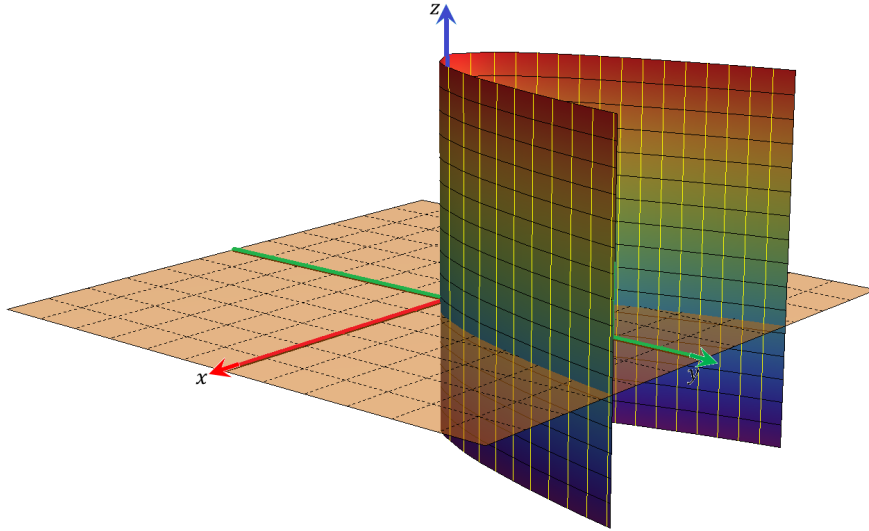


Figura 1.7.6: Cilindro parabólico de ecuación $x^2 = y$.

1.7.3 Ejercicios

- Haga un listado de objetos cuya superficie sea alguna de las cuádricas. Identifique las características de la superficie (el o los ejes de simetría, los semiejes, el vértice o centro si tiene, si es abierta o cerrada, si es de una o dos hojas). Intente construir algunas de ellas, y marque sobre el objeto las trazas paralelas y perpendiculares al eje (imagíne que va rebanando ese objeto, cortando tajadas horizontales o verticales).
- Dé un ejemplo de cada superficie cuádrica. Esboce la gráfica a mano alzada. Grafique algunas cuádricas utilizando programas de cálculo que permiten visualizar superficies (como GeoGebra o algún otro).
- Reescriba las ecuaciones para cada tipo de superficie cuádrica, cambiando el eje de simetría. Explique la figura obtenida (por ejemplo: un paraboloides elíptico de eje y , “acostado”, es lo que corresponde a la ecuación $y = 3x^2 + 8z^2$).
- Considere las siguientes cuádricas: $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = x^2 + y^2$. Obtenga y compare las ecuaciones de las trazas horizontales de ambas superficies para $z = 0, 1, 4$ y 9 . Projete las trazas en el plano xy (realice estos gráficos en computadora y consérvelos, los usaremos más adelante).
- Considere un colador chino (o un embudo) apoyado boca abajo sobre una mesada. Tomando $z = 0$ al nivel de la mesada, escriba una ecuación que describa el colador.
 - Imagine que sostiene en su mano un paraguas con forma de paraboloides (de revolución); escriba una ecuación que lo describa, tomando el piso como $z = 0$.
- A partir del paraboloides $S_0 : z = x^2 + y^2$, grafique y obtenga las ecuaciones de las siguientes superficies que corresponden a traslados o a dilataciones respecto de S_0 :
 - S_1 : tiene el vértice en $(0, 0, 2)$
 - S_2 : tiene el vértice en $(3, 3, 2)$
 - S_3 : abre hacia abajo en $(0, 0, 4)$
 - S_4 : abre hacia abajo y tiene el vértice en $(0, 0, 4)$
- Esboce la gráfica de las siguientes superficies cilíndricas
 - $z = \sin(x)$
 - $x^2 + 2z^2 = 4$

1.8 Otros sistemas de coordenadas

Un vaso de precipitado posee una escala graduada en el sentido vertical; si quisiéramos localizar una partícula flotando en un líquido dentro de ese vaso, bastaría dar su altura, la distancia al eje de ese vaso y una orientación. El conjunto de puntos del espacio que distan del origen en 3 unidades queda bien descrito dando el número 3; y si queremos referirnos al subconjunto de aquellos puntos P que están en el semiespacio superior podemos agregar el dato de que el ángulo entre el semi eje z positivo y el vector posición \vec{OP} esté entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Observar que no hemos mencionado las coordenadas cartesianas de los puntos, sino que dimos descripciones alternativas.

En casos como éstos, resulta más conveniente trabajar en sistemas de coordenadas diferentes de las coordenadas cartesianas. Esto es particularmente útil cuando la región sobre la que se trabaja presenta ciertas simetrías. Efectivamente, en problemas que presentan “simetría circular” en el plano conviene utilizar las *coordenadas polares* r, θ ; mientras que problemas en el espacio con la simetría de un cilindro circular recto o de una esfera resultan más fácil de tratar en *coordenadas cilíndricas* r, θ, z o en *coordenadas esféricas* ρ, θ, ϕ , respectivamente. Veamos cómo expresar diferentes regiones en los distintos sistemas de coordenadas: aprovechando que ya vimos cómo se expresan en coordenadas cartesianas, necesitamos entonces conocer las reglas de *cambio* o *transformación de coordenadas*.

1.8.1 Sistema de coordenadas polares en el plano

Las coordenadas polares de un punto P del plano son la distancia r al origen y el ángulo θ desde el semieje x positivo a la dirección \vec{OP} en sentido antihorario (ver Figura 1.8.1).

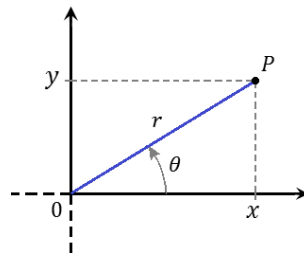


Figura 1.8.1: Sistema de coordenadas polares en el plano.

Si el punto P tiene coordenadas cartesianas (x, y) , con $x \neq 0$, entonces sus coordenadas polares (r, θ) se obtienen como

$$\begin{cases} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \theta &= y/x \end{cases}$$

Estas ecuaciones dan el cambio o *transformación de coordenadas cartesianas a polares*. Por ejemplo, el punto $P(1, 1)$ tiene coordenadas polares $r = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$. La transformación inversa, de coordenadas polares a cartesianas, es

$$\begin{cases} x &= r \cos \theta \\ y &= r \operatorname{sen} \theta. \end{cases}$$

Por ejemplo, el punto con $r = 2$ y $\theta = \frac{3}{2}\pi$ es el $(0, -2)$. Vemos que, mientras las variables cartesianas x e y toman cualesquiera valores reales, las variables polares están restringidas a: $r \geq 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

El origen O es el punto que satisface $r = 0$, para cualquier θ . Todo el semieje x positivo verifica $\theta = 0$, y el semieje x negativo es $\theta = \pi$; la ecuación $\theta = \frac{\pi}{2}$, con r arbitrario, describe el semieje y positivo, y $\theta = \frac{3}{2}\pi$ describe el semieje y negativo. El semiplano superior (sin el eje x) está dado por $r > 0$ y $0 < \theta < \pi$. Los puntos del primer cuadrante forman el conjunto $\{(r, \theta) : r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$.

Veamos algunas expresiones generales:

- Los puntos que satisfacen $r = R$ (para algún R fijo, estrictamente positivo), con $\theta \in [0, 2\pi)$, corresponden a la *circunferencia* de radio R centrada en el origen; efectivamente, transformando a cartesianas se tiene $r = \sqrt{x^2 + y^2} = R$, o sea $x^2 + y^2 = R^2$.
- Los puntos que satisfacen $\theta = \alpha$ (para algún α fijo, entre 0 y 2π), con $r \geq 0$, corresponden a la *semirrecta* que “sale” del origen y forma un ángulo α a partir del semieje x positivo, en sentido antihorario; de hecho, transformando a cartesianas se tiene $\theta = \frac{y}{x} = \text{tg } \alpha$, o sea $y = mx$ donde $m = \text{tg } \alpha$.
- El *círculo* de radio R centrado en el origen se escribe: $r \leq R$; una *corona circular* entre los radios R_1 y R_2 se escribe: $R_1 \leq r \leq R_2$; un *sector (angular)* entre los ángulos α_1 y α_2 se escribe: $\alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2$; mientras que $R_1 \leq r \leq R_2, \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2$ define un *sector de corona circular*.

El segmento en la bisectriz del primer cuadrante, a más de 2 unidades y menos de 4 del origen, está dado por el conjunto $\{(r, \theta) : 2 < r < 4, \theta = \frac{\pi}{4}\}$. El conjunto de puntos del plano que distan del origen en 3 o menos unidades, se escribe como la desigualdad $r \leq 3$ y su representación gráfica es el círculo de radio 3 centrado en O . Graficar el segmento y el círculo dados.

- C** Dé otros ejemplos y grafique. Observe que las regiones del plano que “tienen la simetría del círculo”, se expresan de manera mucho más sencilla en coordenadas polares que en cartesianas; aprovecharemos esta simplicidad.

■ **Ejemplo 1.8.1** a) ¿Cómo se expresa en coordenadas polares un *sector de corona circular* entre los radios 2 y 3, y entre los ángulos $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3}$? Justificar el nombre de “rectángulo polar” para este tipo de regiones.

b) Recordando que el área de un círculo de radio R es

$$A(\text{círculo}) = \pi R^2,$$

Y teniendo en cuenta que el área de un sector angular de radio R y que abarca un ángulo de α es

$$A(\text{sector angular}) = \frac{1}{2} \alpha R^2,$$

¿cuánto vale el área de una corona circular y de un sector de corona circular?

c) Evaluar el área para el ejemplo dado en a), y comparar con el área del “rectángulo polar” $r \in [3, 4], \theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$. Analizar el resultado.

a) El sector de corona circular dado es el conjunto $\{(r, \theta) : 2 \leq r \leq 3, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\}$. Dado que los límites para r y para θ son fijos, por analogía con la definición usual de rectángulo cartesiano se lo puede denominar “rectángulo polar” (aunque la gráfica de la región NO es precisamente un rectángulo en el plano xy).

b) Para una corona circular entre R_1 y R_2 (con $R_1 < R_2$), su área es la diferencia entre las áreas de los círculos, esto es

$$A(\text{corona circular}) = \pi(R_2^2 - R_1^2)$$

(casos límite: para $R_1 = 0$ da el área del círculo completo de radio R_2 ; para $R_1 = R_2$ la corona se reduce a una circunferencia, que tiene área nula).

El área de un sector de corona circular es

$$A(\text{sector de corona circular}) = \frac{1}{2}\alpha(R_2^2 - R_1^2).$$

(casos límites: para $\alpha = 2\pi$ da el área de la corona; para $\alpha = 0$ da área nula).

- c) Para el ejemplo dado en a), tenemos $R_1 = 2$, $R_2 = 3$ y $\alpha = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$; luego el área da $\frac{5}{12}\pi$. Mientras que el sector entre los mismos ángulos pero desde $R_1 = 3$ hasta $R_2 = 4$, tiene un área mayor: $\frac{7}{12}\pi$. Estos dos “rectángulos polares” NO tienen la misma área, aún cuando $R_2 - R_1 = 1$ en ambos casos.
Dibujar ambos sectores y observar gráficamente cómo se agranda la región (para un dado ángulo α fijo) al alejarse del origen.

■

- **Ejemplo 1.8.2** a) Escribir en coordenadas polares la ecuación de la circunferencia de radio 4 y centro en $C(0, 4)$. Graficar.
b) Idem con centro en $D(4, 0)$. Graficar.
c) Comprobar que la expresión general para una circunferencia descentrada una distancia exactamente igual a su radio R en el sentido $+y$ es: $r = 2R \sin \theta$, $\theta \in [0, \pi]$; y en el sentido $+x$ es: $r = 2R \cos \theta$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Graficar.

- a) En cartesianas tenemos $x^2 + (y-4)^2 = 16$. Para pasar a polares usamos la transformación $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Luego queda

$$(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta - 4)^2 = 16,$$

o sea

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta - 8r \sin \theta + 16 = 16,$$

que simplificando resulta

$$r^2 - 8r \sin \theta = 0,$$

o

$$r(r - 8 \sin \theta) = 0.$$

Las soluciones son $r = 0$ (el origen) y $r = 8 \sin \theta$, donde hay que tener en cuenta que $\sin \theta$ sea positivo, esto es, θ debe restringirse al intervalo $[0, \pi]$ (lo que ya sabíamos: esta circunferencia se encuentra en el semiplano superior).

Verificar que los puntos $(4, 4)$, $(0, 8)$ y $(-4, 4)$ están sobre la curva $r = 8 \sin \theta$.

- b) Siguiendo un razonamiento similar, la transformación de la ecuación $(x-4)^2 + y^2 = 16$ a polares da

$$r(r - 8 \cos \theta) = 0,$$

de donde $r = 0$ ó $r = 8 \cos \theta$, con ángulo correspondiente al primer y cuarto cuadrantes (cuyo coseno es positivo), que podemos escribir en la forma $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Verificar que la curva $r = 8 \cos \theta$ pasa por los puntos $(4, 4)$, $(8, 0)$ y $(4, -4)$

- c) Aquí se pide hacer la transformación en sentido inverso: de polares a cartesianas. Vemos que si multiplicamos la primera ecuación por r , queda $r^2 = 2Rr \sin \theta$, que pasado a cartesianas da $x^2 + y^2 = 2Ry$ de donde $x^2 + y^2 - 2Ry = 0$. Completando cuadrados se llega a $x^2 + (y - R)^2 = R^2$.
Resolver el otro caso y graficar ambas circunferencias.

■

1.8.2 Sistema de coordenadas cilíndricas en el espacio

Las coordenadas cilíndricas de un punto P del espacio son la distancia r desde P_I (proyección de P en el plano xy) al origen, el ángulo θ desde el semieje x positivo a la dirección $\overrightarrow{OP_I}$ en el plano xy en sentido antihorario mirado desde $+z$, y la altura z del punto. Ver Figura 1.8.2.

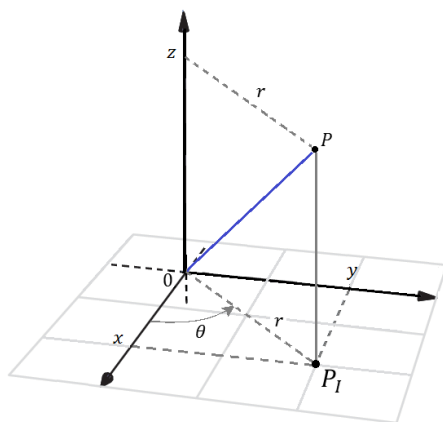


Figura 1.8.2: Sistema de coordenadas cilíndricas en el espacio.

Si el punto P tiene coordenadas cartesianas (x, y, z) , con $x \neq 0$, entonces sus coordenadas cilíndricas (r, θ, z) se obtienen como

$$\begin{cases} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \theta &= y/x \\ z &= z. \end{cases}$$

Estas ecuaciones dan la *transformación de coordenadas cartesianas a cilíndricas*. Por ejemplo, el punto $P(1, 1, -7)$ tiene coordenadas cilíndricas $r = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $z = -7$. La transformación inversa, de coordenadas cilíndricas a cartesianas, es

$$\begin{cases} x &= r \cos \theta \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \\ z &= z \end{cases}$$

Por ejemplo, el punto con $r = 2$, $\theta = \frac{3}{2}\pi$ y $z = \sqrt{3}$, es el $(0, -2, \sqrt{3})$. Observamos que, mientras las variables cartesianas x, y, z toman todos los valores reales, las variables cilíndricas están restringidas a: $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

Notar que para los puntos en el plano xy , que tienen $z = 0$, las coordenadas cilíndricas r y θ son las mismas que las coordenadas polares.

El origen O es el punto que satisface $r = 0$, $z = 0$, para cualquier θ . Todo el semieje x positivo verifica $\theta = 0$, $z = 0$, y el semieje x negativo es $\theta = \pi$, $z = 0$; las ecuaciones $\theta = \frac{\pi}{2}$, $z = 0$, con r arbitrario, describen el semieje y positivo, y $\theta = \frac{3}{2}\pi$, $z = 0$ describen el semieje y negativo; el eje z queda determinado por $r = 0$ en cilíndricas. El plano xy está dado por $z = 0$; el plano xz está dado por $\theta = 0$ y $\theta = \pi$; ¿y el plano yz ? Los puntos del primer octante forman el conjunto $\{(r, \theta, z) : r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, z \geq 0\}$.

Veamos algunas expresiones generales:

- Los puntos que satisfacen $r = R$ (para algún R fijo, estrictamente positivo), con $\theta \in [0, 2\pi)$ y $z \in (-\infty, +\infty)$, corresponden a la *superficie del cilindro circular recto* de radio R y eje z . Transformando a cartesianas se tiene $r = \sqrt{x^2 + y^2} = R$, o sea $x^2 + y^2 = R^2$, para todo z .
- Los puntos que satisfacen $\theta = \alpha$ (para algún α fijo, entre 0 y 2π), con $r \geq 0$ y $z \in \mathbb{R}$, corresponden al semiplano vertical que “toca” al eje z y forma un ángulo α con el plano xz .

Transformando a cartesianas se tiene $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$, o sea el (semi)plano vertical $mx - y = 0$ donde $m = \operatorname{tg} \alpha$.

- El *cilindro* de radio R centrado en el eje z se escribe: $r \leq R$; si tiene una altura dada se escribe también $z_1 \leq z \leq z_2$.
- La ecuación $z = r$ en cilíndricas describe la superficie de un cono circular en el semiespacio superior (efectivamente en cartesianas se tiene $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, o sea $z^2 = x^2 + y^2$ recordando que z era positivo).

La franja del plano vertical que divide al medio el primer octante, a más de 2 unidades y menos de 4 del eje z , está dada por el conjunto $\{(r, \theta, z) : 2 < r < 4, \theta = \frac{\pi}{4}, z \geq 0\}$. El conjunto de puntos del espacio que distan del eje z en 3 o menos unidades, se escribe como la desigualdad $r \leq 3$ y su representación gráfica es la superficie más el “interior” de un cilindro circular recto de eje de simetría z y de radio 3. Graficar la superficie y el sólido dados.

Dé otros ejemplos y grafique. Observe que las regiones del espacio que “tienen la simetría del cilindro”, se expresan de manera mucho más sencilla en coordenadas cilíndricas que en cartesianas; aprovecharemos esta simplicidad.

■ **Ejemplo 1.8.3** a) Describir todos los puntos del espacio que son interiores a la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 9$, entre $z = 0$ y $z = 10$. Hallar el volumen del cilindro. b) Dar en coordenadas cilíndricas los puntos limitados por abajo por el paraboloides elíptico $z = x^2 + y^2$ y por arriba por el plano $z = 4$.

- a) El sólido se expresa como $0 \leq r \leq 3, 0 \leq z \leq 10$. Recordando que el volumen de un cilindro de radio R y altura h es

$$\operatorname{Vol}(\text{cilindro}) = \pi R^2 h,$$

entonces resulta $\pi 3^2 \times 10 = 90\pi$.

- b) Dada la simetría de este sólido, resulta muy sencillo expresarlo en coordenadas cilíndricas. Efectivamente, la frontera del sólido está constituida por la unión de parte de las superficies $z = r^2$, y $z = 4$. Luego el sólido es el conjunto de puntos $E = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq 4\}$.

■

1.8.3 Sistema de coordenadas esféricas en el espacio

Las coordenadas esféricas de un punto P del espacio son la distancia ρ al origen, el ángulo θ desde el semieje x positivo a la dirección $\overrightarrow{OP_I}$ en el plano xy (siendo P_I la proyección de P en dicho plano) en sentido antihorario mirado desde $+z$, y el ángulo ϕ desde el semieje z positivo a la dirección \overrightarrow{OP} (ver Figura 1.8.3).

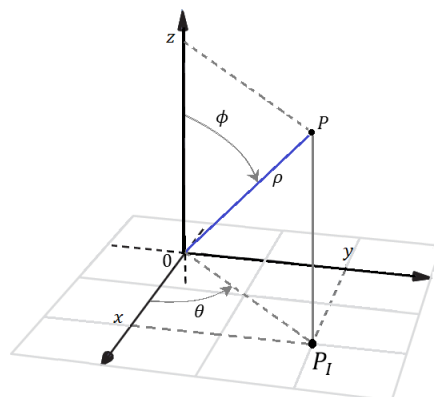


Figura 1.8.3: Sistema de coordenadas esféricas en el espacio.

Si el punto P tiene coordenadas cartesianas (x, y, z) , con $x \neq 0$, entonces sus coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) se obtienen como

$$\begin{cases} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{y}{x} \\ \cos \phi &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{cases}$$

Estas ecuaciones dan la *transformación de coordenadas cartesianas a esféricas*. Por ejemplo, el punto $P(-1, 1, \sqrt{2})$ tiene coordenadas esféricas $\rho = 2, \theta = \frac{3}{4}\pi, \phi = \frac{\pi}{4}$. La transformación inversa, de coordenadas esféricas a cartesianas, es

$$\begin{cases} x &= \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y &= \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z &= \rho \cos \phi. \end{cases}$$

Por ejemplo el punto con $\rho = 2, \theta = \frac{\pi}{6}, \phi = \frac{\pi}{4}$, es el $(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{6}, \sqrt{2})$. Observamos que, mientras las variables cartesianas x, y, z toman cualquier valor real, las variables esféricas están restringidas a: $\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$ (¿por qué no es necesario tomar valores de ϕ entre π y 2π ?). Notar que $\rho \operatorname{sen} \phi$ corresponde a la coordenada cilíndrica r ; además, para los puntos del plano xy , las coordenadas esféricas ρ y θ son las mismas que las coordenadas polares.¹

El origen O es el punto que satisface $\rho = 0$, para cualquier θ y ϕ . El semieje x positivo verifica $\theta = 0, \phi = \frac{\pi}{2}$, y el negativo es $\theta = \pi, \phi = \frac{\pi}{2}$; las ecuaciones $\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{2}$, con ρ arbitrario, describen el semieje y positivo, y $\theta = \frac{3}{2}\pi, \phi = \frac{\pi}{2}$ describen el semieje y negativo; el semieje $+z$ queda determinado por $\phi = 0$, mientras que el semieje z negativo es $\phi = \pi$ en esféricas. El plano xy está dado por $\phi = \frac{\pi}{2}$; el plano xz está dado por $\theta = 0$ ó $\theta = \pi$; ¿y el plano yz ?

Veamos algunas expresiones generales:

- Los puntos que satisfacen $\rho = R$ (para algún R fijo, estrictamente positivo), con $\theta \in [0, 2\pi)$ y $\phi \in [0, \pi]$, corresponden a la superficie esférica de radio R . Efectivamente, transformando a cartesianas se tiene $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$, o sea $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
- Los puntos que satisfacen $\theta = \alpha$ (para algún α fijo, entre 0 y 2π), con $\rho \geq 0$ y $\phi \in [0, \pi]$, corresponden al semiplano vertical que “toca” al eje z y forma un ángulo α con el plano xz .
- La ecuación $\phi = \alpha$ (para algún α fijo, menor que $\pi/2$) describe la superficie de medio cono circular, en el semiespacio superior.

Consideremos por ejemplo el conjunto de puntos del espacio que distan del origen en 3 o menos unidades, esto se escribe como la desigualdad $\rho \leq 3$ y su representación gráfica es una esfera de radio 3 centrada en el origen.

Dé otros ejemplos y grafique.

■ **Ejemplo 1.8.4** Dibuje el sólido descrito por las desigualdades:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6} \quad 0 \leq \rho \leq \sec \phi$$

En este ejemplo, el uso de valores negativos de θ indica ángulos tomados respecto del plano xz en sentido antihorario mirando desde $+z$. Otra forma de expresar la misma región es: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ó $\frac{3}{2}\pi \leq \theta < 2\pi$. Por el rango de variación de las variables angulares, sabemos

¹En física, es más común designar con “ ϕ ” al ángulo que está en el plano xy , y con “ θ ” al ángulo respecto del eje $+z$, o sea, al revés de lo que hacemos aquí. Sin embargo, esto no afecta los cálculos. Simplemente se debe tener cuidado de estar usando la notación adecuada en cada contexto.

que esta región sólida se encuentra en el semiespacio con x positivo, y que se encuentra “cerca” del eje $+z$, a no más de 30 grados de inclinación, lo que sugiere que podría tratarse de parte de una región cónica.

Además, sospechamos que la región sólida es cerrada, ya que la variable radial ρ está limitada. Para identificar el límite superior para ρ , es conveniente transformar a coordenadas cartesianas la relación $\rho \leq \sec \phi$, que se puede escribir como $\rho \leq 1/\cos \phi$. Luego queda $\rho \cos \phi \leq 1$, pero $\rho \cos \phi$ es z . Finalmente deducimos que debe ser $z \leq 1$.

Se trata de una parte de un cono “relleno” de ángulo $\frac{\pi}{6}$ respecto de su eje, en el semiespacio x positivo, hasta altura $z = 1$.

■

1.8.4 Ejercicios

1. Muestre que la ecuación de la circunferencia de radio 4 y centro en $x = 1, y = 2$, está dada en coordenadas polares por $r^2 - 2r(\cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta) - 11 = 0$.
2. a) Exprese los siguientes puntos en coordenadas cilíndricas:

$$A(0, 5, 1), \quad B(1, \sqrt{3}, 4), \quad C(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 4), \quad D(-3, 2, -1.)$$

- b) Exprese los siguientes puntos en coordenadas esféricas:

$$A(4, 0, 0), \quad B(-2, 2\sqrt{3}, 4), \quad C(2, 2, 4\sqrt{2}), \quad D(-4, 0, 0).$$

3. Describa en coordenadas cilíndricas: a) la semiesfera centrada en O de radio 2, por encima del plano xy ; b) la superficie esférica centrada en O de radio 3, en el primer octante; c) el paraboloides circular con coeficientes $a = b = 4$ y vértice en $V(0, 0, 9)$ que abre hacia abajo.
4. Halle una ecuación en coordenadas cartesianas que corresponda a las siguientes ecuaciones en esféricas: a) $\rho = 2$; b) $\theta = \frac{3}{4}\pi$; c) $\phi = \frac{\pi}{6}$; d) $\rho = 2 \sec \phi$.
5. Escriba cada una de las ecuaciones siguientes en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas: a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; b) $x^2 + y^2 = 4$.
6. Dibuje el sólido que consiste en todos los puntos con coordenadas esféricas tales que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}, 0 \leq \rho \leq 2 \cos \phi$.

1.9 Actividades integradoras y autoevaluación

1.9.1 Actividades integradoras

1. Una persona camina, a partir de cierta ubicación inicial, sucesivamente 50 m hacia el este, 30 m hacia el sur, 20 m hacia el oeste y 10 m hacia el norte. Modele esta situación en un plano coordenado. Escriba los vectores desplazamiento asociados a cada uno de los trayectos. Determine gráfica y analíticamente el vector desplazamiento total, entre el punto inicial y final del recorrido. ¿Cuál es la distancia total recorrida por la persona?
2. Pruebe que para cualesquiera $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$, se verifica la propiedad de distributividad de los productos escalar y vectorial respecto de la suma de vectores:
 - a) $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$
 - b) $\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{v}$
3. Resuelva el Ejemplo 1.3.4, para $\vec{u} = (u_1, u_2)$ arbitrario (no nulo).
4. Halle un vector unitario \vec{u} que sea perpendicular a las rectas cuyas ecuaciones son $x = 4 - t, y = 3 + 2t, z = 1 + 5t$ y $x = -3 + 7s, y = -2 + s, z = 1 + 2s$.
5. Obtenga ecuaciones paramétricas para la recta intersección entre los planos cuyas ecuaciones son $3x + 2y + z = 12$ y $x - 4y + 2z = 0$.
6. Dos puntos determinan una recta, mientras que tres puntos no alineados determinan un plano (¿por qué?). Elija 3 puntos cualesquiera del espacio; verifique que no estén alineados y explique de qué manera puede hallar una ecuación del plano a partir de esos datos.

7. Estudie cómo se define la distancia entre un punto y una recta, y entre un punto y un plano. Seleccione un ejercicio de cada tipo de la bibliografía disponible, y resuélvalos.
8. Analice justificadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: La ecuación $x^2 + y^2 = 4$ corresponde a una circunferencia tanto en el plano coordenado xy como en el espacio.
9. Resuelva los Ejercicios 3 y 5 de la Sección 1.2, para un sistema tridimensional. Asocie estas respuestas con las soluciones encontradas en el caso bidimensional.
10. ¿Qué regiones del espacio corresponden a cada una de las siguientes ecuaciones?
a) $x^2 + y^2 = 0$; b) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$; c) $x^2 + y^2 + z^2 = -1$; d) $x^2 - y^2 = 0$.
11. Discutan en pequeños grupos los siguientes ejercicios:
 - a) Stewart, *Conceptos y Contextos* (3a ed.), pag. 683-684: Ejercicios 2 y 15 de la Sección 9.6
 - b) Stewart, *Trascendentes Tempranas* (6a ed.), pag. 811: Ejercicios 21–28 de la Sección 12.6
 - c) Larson–Hostetler–Edwards, *Cálculo II* (7a ed.), pag. 123: Ejercicios 1–6 de la Sección 10.6
 - d) Larson–Hostetler–Edwards, *Cálculo II* (7a ed.), pag. 131: Ejercicios 81–86 de la Sección 10.7
12. Muestre que un sector de corona circular “pequeño” tiene un área aproximada $R \Delta R \Delta \theta$, siendo $R_1 = R$, $R_2 = R + \Delta R$, $\theta_1 = \alpha$, $\theta_2 = \alpha + \Delta \theta$ los límites de la región.
13. ¿Cómo describiría matemáticamente un cucurucho con una bocha de helado arriba? (más adelante veremos cómo calcular el volumen, y por lo tanto sabremos cuánto helado contiene)
14. Grafique la superficie de “medio” cono circular de eje z , sabiendo que el vértice está en $O(0, 0, 0)$ y que contiene al punto $P_0(1, 0, 1)$. Escriba ecuaciones para esta superficie, usando coordenadas: a) cartesianas, b) cilíndricas, y c) esféricas. ¿Qué ecuaciones le parecen más sencillas?
15. Identifique la curva intersección entre las superficies $z = \sin \theta$ y $r = 1$ (dadas en coordenadas cilíndricas). Grafique.
16. Identifique la curva intersección entre las superficies $\rho = 2 \sec \phi$ y $\rho = 4$ (dadas en coordenadas esféricas). Grafique.

1.9.2 Autoevaluación

Se propone que resuelva los siguientes ejercicios (del estilo de los que podrían plantearse en un parcial de la materia), en forma individual y dedicando aproximadamente 30 minutos en total. Justifique cada uno de los pasos en sus demostraciones teóricas; los cálculos numéricos puede dejarlos expresados (no es necesario el uso de la calculadora, a menos que necesite comparar valores numéricos).

1. Sean a, b, c números reales fijos, estrictamente positivos. La ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ representa un plano en el espacio, del cual puede verse en el primer octante un triángulo. Encuentre los vértices de ese triángulo. Muestre que la proyección de los puntos de dicho triángulo en el plano xy es la región $\{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq -\frac{b}{a}x + b\} \subset \mathbb{R}^2$. Dé un ejemplo y grafique tanto el plano como su proyección en xy .
2. Clasifique y esboce las gráficas de las siguientes superficies cuádricas:

$$S_1 : z = 3 - x^2 - y^2, \quad S_2 : z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \quad S_3 : z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Escriba, en cada caso, las ecuaciones para las trazas horizontales que corresponden a $z = 0, 1, 2, 3$. Projete en el plano xy las curvas obtenidas y compare.

3.
 - a) Expresar en coordenadas cartesianas y en coordenadas polares, la ecuación de la circunferencia de radio 2 y centro en $(0, 2)$.
 - b) Expresar en coordenadas cartesianas y en coordenadas cilíndricas, la ecuación de la superficie de un cilindro circular recto de eje vertical, que corta al plano xy en la circunferencia de radio 2 y centro en $(0, 2)$.

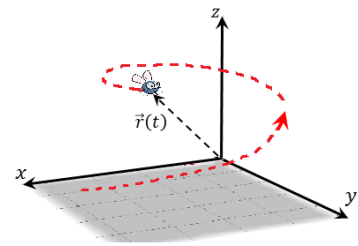
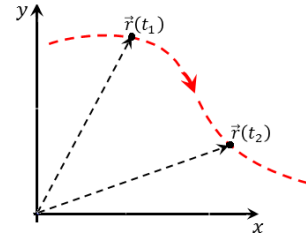
2

Funciones vectoriales de un parámetro

2.1	Curvas paramétricas y funciones vectoriales de un parámetro	56
2.1.1	Curvas paramétricas	56
2.1.2	Ejercicios	66
2.2	Derivación e integración de funciones vectoriales	68
2.2.1	Límite y continuidad	68
2.2.2	Derivación	69
2.2.3	Integración	75
2.2.4	Ejercicios	75
2.3	Longitud de una curva paramétrica	76
2.3.1	Función longitud de arco	78
2.3.2	Ejercicios	79
2.4	Aplicación: Movimiento en el espacio	80
2.4.1	Ejercicios	83
2.5	Actividades integradoras y autoevaluación	84
2.5.1	Actividades integradoras	84
2.5.2	Autoevaluación	85

2.1 Curvas paramétricas y funciones vectoriales de un parámetro

Con frecuencia consideramos una curva en el plano como una línea trazada sobre un papel, tal como puede ser una línea recta, una curva parabólica o una circunferencia. Nos preguntamos ahora, ¿cómo podemos describir (analíticamente) una curva en el plano? Es evidente que debemos indicar de alguna manera los puntos por donde pasa, los puntos que forman la curva. En algunos casos, podemos usar para ello las coordenadas cartesianas de los puntos $P(x, y)$ de la curva, expresando a y como una función de x , por ejemplo $y = 1 + \cos^2(x)$, o a x como una función de y , por ejemplo $x = y^2$, o dar una relación entre x e y que defina implícitamente a una variable en términos de la otra, por ejemplo $x^2 + y^2 = 166$. Hay curvas que se representan más fácilmente mediante otro sistema de coordenadas (por ejemplo, $r = 2 \cos \theta$ usando coordenadas polares). Algunas curvas se describen mejor cuando las coordenadas x e y están dadas en términos de una variable t llamada parámetro (como en el caso de las ecuaciones paramétricas de una recta en el plano vistas en la Sección 1.5.1 del Capítulo 1). Podemos, también, indicar cada punto de una curva haciendo uso de la asociación de P con el punto final del vector $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ ubicado en posición canónica. En este capítulo discutiremos la forma paramétrica de describir curvas mediante una representación vectorial.



2.1.1 Curvas paramétricas

Imaginemos un objeto que se mueve en un plano y , a medida que transcurre el tiempo, describe un camino como el representado por la curva de la Figura 2.1.1.

Si bien notamos que esta curva no puede ser descrita por una ecuación de la forma $y = F(x)$ (¿por qué?), sabemos que las coordenadas x e y de la posición del objeto dependen del instante de tiempo t . Por lo tanto existirán funciones f y g de la variable (o *parámetro*) t , tales que $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Este par de ecuaciones, que muchas veces es una forma conveniente para describir una curva, se llama *ecuaciones paramétricas* de la curva en el plano:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t). \end{cases}$$

Cada valor de t determina un único punto (x, y) en el plano. Cuando t varía (en un intervalo de números reales), el punto $(x, y) = (f(t), g(t))$ se mueve generando una curva en el plano.

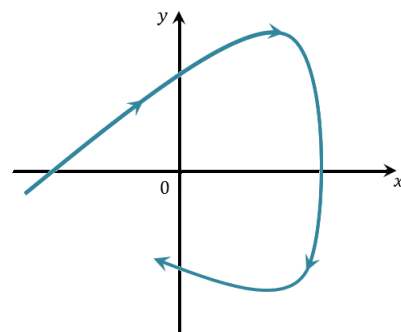


Figura 2.1.1: Curva en el plano



En el siguiente recurso se pueden graficar curvas paramétricas en el plano ingresando las expresiones para $f(t)$ y $g(t)$ que deseen.

<https://ggbm.at/znWXYtud>

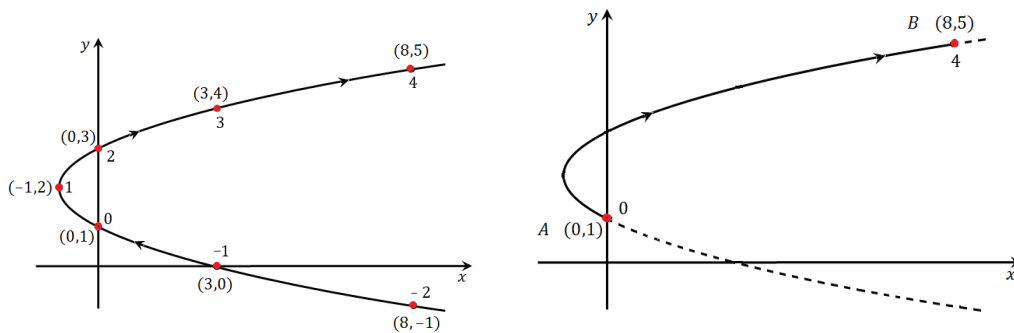
■ **Ejemplo 2.1.1** Las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t + 1 \end{cases}$$

con t real, definen una curva plana. Describir y graficar la curva para los siguientes casos: a) si $t \in (-\infty, +\infty)$; b) si $t \in [0, 4]$.

En este ejemplo tenemos $f(t) = t^2 - 2t$, $g(t) = t + 1$.

a) A cada valor del parámetro $t \in \mathbb{R}$, le corresponde un punto de la curva. Por ejemplo, para $t = 0$ se tiene $x = f(0) = 0$ e $y = g(0) = 1$, o sea que el punto de la curva correspondiente a $t = 0$ es $(0, 1)$. Podemos así evaluar x e y para varios valores del parámetro, por ejemplo asignar a t los valores $-2, -1, 1, 2, 3, 4$, y luego situar los puntos $(x, y) = (f(t), g(t))$ en el plano. Si unimos estos puntos para producir una curva continua obtenemos la Figura 2.1.2 a), en la que las flechas indican el sentido en el que se van generando los puntos de la curva a medida que t aumenta su valor (se indica el valor de t que corresponde a cada punto marcado en la curva).



a) El parámetro t adopta cualquier valor real.

b) El parámetro t varía en $[0, 4]$.

Figura 2.1.2: Ecuaciones paramétricas: $x = f(t) = t^2 - 2t$, $y = g(t) = t + 1$.

Observando la figura, parece que la curva trazada fuera una parábola. ¿Cómo podemos comprobarlo? Una forma es reescribir las ecuaciones paramétricas de la curva usando (sólo) coordenadas cartesianas, esto es, buscar una relación entre x e y , sin el parámetro t . Para ello debemos eliminar t en las ecuaciones dadas. En este ejemplo es posible hacerlo, por ejemplo despejando $t = y - 1$ de la segunda ecuación y luego sustituyendo en la primera ecuación. Esto da:

$$x = t^2 - 2t = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 4y + 3$$

y así vemos que la curva descrita por las ecuaciones paramétricas dadas es la parábola

$$x + 1 = (y - 2)^2,$$

de eje horizontal y vértice en $(-1, 2)$, con las ramas que abren hacia la derecha.

b) Si $t \in [0, 4]$, la curva paramétrica es ahora la parte de la parábola $x = y^2 - 4y + 3$ que empieza en el punto que corresponde al valor $t = 0$ del parámetro, o sea $A(0, 1)$, y termina en el punto que corresponde a $t = 4$, esto es en $B(8, 5)$, como se muestra en la Figura 2.1.2 b). La flecha señala el sentido de recorrido de la curva cuando el parámetro aumenta su valor desde $t = 0$ hasta $t = 4$.

■

Consideremos ahora un objeto que se mueve en el espacio, describiendo un camino imaginario representado por una curva en el espacio. Habrá entonces tres funciones del tiempo, f , g y h , que nos permitirán escribir las coordenadas de la posición del objeto en cada instante t mediante las siguientes *ecuaciones paramétricas*:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t). \end{cases}$$

Observemos que para cada t , el punto $P(f(t), g(t), h(t))$ da la *posición* del objeto en el tiempo t . Podemos definir el vector que va de O a P , para cada t (ver Figura 2.1.3). Esto sugiere que una curva paramétrica puede ser descrita mediante una función que a cada valor del parámetro t le asigna el vector $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$, esto es, mediante una *función con valores vectoriales*.

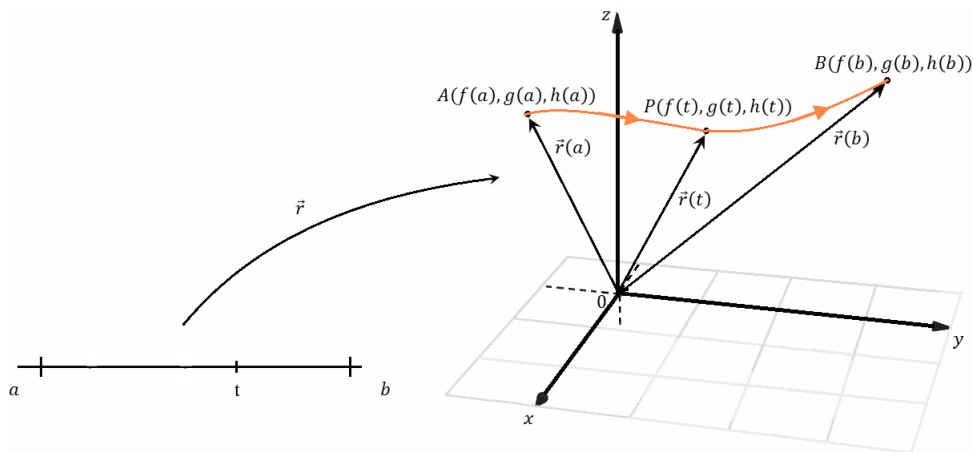


Figura 2.1.3: A medida que el parámetro t varía en $[a, b]$, el punto final del vector $\vec{r}(t)$ va generando una curva en el espacio.

La asociación entre punto y vector posición, en el caso de una curva en el plano, permite escribir $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$.

Ejercicio En la Figura 2.1.2 a) dibuje los vectores $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}$ correspondientes a $t = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ y 4 .



En el siguiente recurso pueden ver, en forma animada, cómo varía la ubicación del punto $P(f(t), g(t), h(t))$ con t :

<https://ggbm.at/rfBDfd3d>

Ahora bien, ¿qué es una *función con valores vectoriales*? Sabemos que una función en general es una regla que asigna a cada elemento del dominio un único elemento de su rango o imagen. El caso de una *función vectorial* es uno de los temas de estudio en Análisis Matemático II. Veremos que esta representación vectorial permite estudiar con facilidad el movimiento de un objeto en función del tiempo, caracterizando la variación temporal del desplazamiento, la velocidad y la aceleración.

Definición Una *función con valores vectoriales*, o simplemente *función vectorial*, es una función cuyo rango o imagen es un conjunto de vectores.

En este capítulo trabajaremos con funciones vectoriales, que denotamos $\vec{r}(t)$, cuyo dominio está en el conjunto de los números reales (intervalo I cerrado, abierto o semiabierto o todo \mathbb{R}) y cuyo rango o imagen está formado por vectores del espacio o del plano. Se tiene

$$\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow V_n \quad \text{donde } n = 3 \text{ o } 2.$$

Decimos que a cada número real t (*parámetro*) del dominio, la *función vectorial* \vec{r} le asigna el vector $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ en el espacio [ó $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$ en el plano]. Para expresar una función vectorial usaremos también la notación

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

en el espacio o

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

en el plano. Notar que, estrictamente, la función vectorial asigna a cada valor t el vector $\vec{r}(t)$ en posición canónica, esto es, el vector con su punto inicial en el origen de coordenadas.

Algunas características:

- Las componentes $f(t), g(t), h(t)$ (ó $x(t), y(t), z(t)$) del vector $\vec{r}(t)$, son funciones escalares de una variable real. Las llamamos *funciones componentes* de $\vec{r}(t)$.
- A medida que el parámetro t varía en su dominio, el punto extremo o final del vector $\vec{r}(t)$ (ubicado en posición canónica) va generando una curva C llamada *curva paramétrica*.
- El *sentido* de la curva paramétrica C está dado por el sentido en el que se van generando los puntos de la curva cuando el parámetro t aumenta su valor en el dominio $I \subset \mathbb{R}$.
- El dominio *paramétrico* I de variación del parámetro t , puede estar restringido a un intervalo finito $[a, b] \subset \mathbb{R}$. En este caso, la curva C tiene un *punto inicial* o *de partida* $A(f(a), g(a), h(a))$ (que es el punto extremo del vector $\vec{r}(a)$ en posición canónica) y un *punto final* o *de llegada* $B(f(b), g(b), h(b))$ (que es el punto extremo del vector $\vec{r}(b)$ en posición canónica). Ver Figura 2.1.3.
- El parámetro no siempre representa el tiempo y podríamos usar otra letra en lugar de t para indicarlo. Existe un parámetro especialmente “interesante” que representa, no ya el tiempo transcurrido, sino la longitud de la porción de curva recorrida desde su inicio; se suele denotar a este parámetro con la letra s , y se lo llama *longitud de arco*.
- Decimos que una curva C , parametrizada por la función vectorial $\vec{r}(t)$, con $a \leq t \leq b$, es cerrada si su punto final coincide con su punto inicial, esto es, si $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

C Según vimos, una función vectorial de un parámetro representa una región del espacio o del plano que no es una región sólida ni una superficie, sino que podríamos decir que es un “objeto unidimensional”: $\vec{r}(t)$ representa una *curva paramétrica* en el espacio o en el plano coordenado, dada en función de un parámetro. De manera similar veremos más adelante que es posible definir una función vectorial que depende de dos parámetros y que (podemos aventurar) representará un “objeto bidimensional”, esto es, una *superficie paramétrica* en el espacio; su estudio queda postergado hasta el Capítulo 5, cuando necesitemos parametrizar superficies en el espacio.

■ **Ejemplo 2.1.2** a) El movimiento de cierto objeto en el plano está definido por la siguiente función vectorial:

$$\vec{r}_1(t) = 4 \cos(t)\vec{i} + 4 \sin(t)\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Graficar la *trayectoria* que describe el objeto al moverse, indicando los puntos inicial y final así como el sentido del recorrido.

b) Si para otro objeto, el movimiento está representado por $\vec{r}_2(t) = -4 \sin(2t)\vec{i} + 4 \cos(2t)\vec{j}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$, ¿cuál es la curva determinada? Compare con el caso a).

Las funciones componentes son $x_1(t) = 4 \cos t$ e $y_1(t) = 4 \sin t$. Si para algunos valores de t situamos en el plano los puntos $P(x_1(t), y_1(t))$, su ubicación parece indicarnos que la curva es una circunferencia (evalúe $\vec{r}_1(t)$ en $t = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$). Si eliminamos el parámetro t entre las ecuaciones $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$, obtenemos la ecuación cartesiana de la curva. Para ello, en este caso conviene sumar las componentes al cuadrado para eliminar el parámetro, entonces queda:

$$x^2 + y^2 = [x_1(t)]^2 + [y_1(t)]^2 = (4 \cos t)^2 + (4 \sin t)^2 = 16 \cos^2 t + 16 \sin^2 t = 16$$

luego

$$x^2 + y^2 = 4^2.$$

Vemos así que el punto $P(x_1(t), y_1(t))$ está en la circunferencia de radio 4 centrada en el origen. Notar que en este ejemplo el parámetro t corresponde al ángulo entre el semieje $+x$ y el vector \vec{OP} , como se ve en la Figura 2.1.4a).

El punto inicial de la curva es $A_1(4, 0)$; a medida que el parámetro aumenta desde 0 hasta 2π , el punto $P(4 \cos t, 4 \sin t)$ da una vuelta a la circunferencia en *sentido antihorario*, esto es contrario al movimiento de las agujas de un reloj. El punto final es el que corresponde a $t = 2\pi$, luego el movimiento de este objeto finaliza en $B_1(4, 0)$. La trayectoria, en este caso, es cerrada y es una vuelta a la circunferencia.

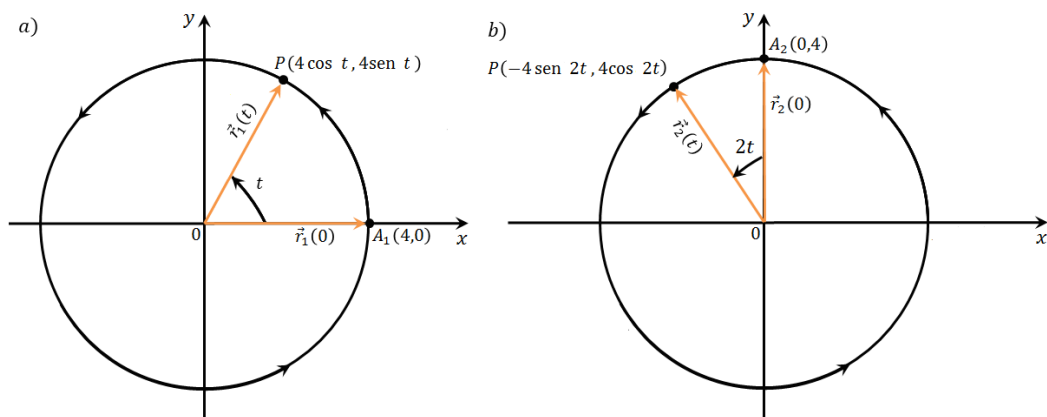


Figura 2.1.4: Curvas paramétricas definidas por: a) $\vec{r}_1(t)$, b) $\vec{r}_2(t)$, para t de 0 a 2π .

b) Si eliminamos el parámetro como hicimos en el inciso anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= [x_2(t)]^2 + [y_2(t)]^2 = [-4 \sin(2t)]^2 + [4 \cos(2t)]^2 \\ &= 16 \sin^2(2t) + 16 \cos^2(2t) = 16 \end{aligned}$$

luego

$$x^2 + y^2 = 4^2.$$

O sea que la gráfica de la curva es también la circunferencia de radio 4 centrada en el origen. Notar que ahora el parámetro t corresponde a la mitad del ángulo entre el semieje $+y$ y el vector \vec{OP} , como se ve en la Figura 2.1.4b).

La curva parametrizada por $\vec{r}_2(t)$ comienza en $A_2(0, 4)$ y termina en ese mismo punto después de haber girado el objeto dos veces sobre la circunferencia en sentido antihorario. La trayectoria, en este caso, es cerrada y corresponde a dos vueltas completas a la circunferencia. ■

- **Ejemplo 2.1.3** Supongamos que se desea estudiar la curva de la Figura 2.1.4a) pero desde una perspectiva espacial (con el eje $+z$ saliendo hacia arriba de la hoja). Es fácil ver que una parametrización de la circunferencia de radio 4 centrada en el origen, horizontal y apoyada en el plano xy , y recorrida una vez completa en sentido antihorario visto desde $+z$, es

$$\vec{r}(t) = 4 \cos(t)\vec{i} + 4 \sin(t)\vec{j} + 0\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Imagine ahora que la circunferencia está en ubicación vertical, apoyada en el plano yz ; proponga una función vectorial que la describa.

Ahora imagine que se traslada la circunferencia original, manteniéndola siempre horizontal, hasta que su centro está en $(0, 0, 3)$, ¿qué función vectorial daría? ¿Y si el centro se traslada al $(1, 2, 3)$?

Por otro lado, notamos que las funciones componentes de $\vec{r}_1(t)$ del Ejemplo 2.1.2 a) son tales que la suma de los cuadrados de $\frac{x_1(t)}{4}$ e $\frac{y_1(t)}{4}$ resulta ser igual a $\cos^2 t + \sin^2 t$ que tiene el valor constante 1 para cualquier t , luego aquella combinación permite “deshacerse del parámetro”. Esto sugiere que para parametrizar una *elipse* de semiejes, por ejemplo, 3 y 5 basta tomar

$$\vec{r}(t) = 3 \cos t \vec{i} + 5 \sin t \vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

ya que $\left(\frac{x(t)}{3}\right)^2 + \left(\frac{y(t)}{5}\right)^2 = 1$ para cualquier t .

■

- Ⓒ Los Ejemplos 2.1.2a) y 2.1.2b) presentan funciones vectoriales distintas, que tienen la misma gráfica. Es necesario distinguir entre una *curva*, que es un conjunto de puntos, y una *curva paramétrica* en la cual los puntos son obtenidos mediante una función vectorial, o sea siguiendo un camino, una dirección y un sentido determinados. En esos ejemplos, aunque las gráficas coinciden, las curvas paramétricas son diferentes. Si pensamos en la curva trazada por el movimiento de un objeto, su representación paramétrica nos dice en qué punto está el móvil en cada instante de tiempo, hacia dónde va, y con qué velocidad y aceleración se mueve; mientras que la gráfica de la curva sólo da información de los puntos por los que pasa el móvil.

Hemos visto en estos ejemplos, dada una función vectorial, cuál es la curva paramétrica correspondiente. Trataremos ahora de, dada una curva, hallar una *parametrización* adecuada.

- **Ejemplo 2.1.4** Parametrización de una recta.

Sea L la recta en el espacio que pasa por los puntos $P(3, 2, 1)$ y $Q(-1, -2, 3)$. Dar una función vectorial que la parametrize.

En el Capítulo 1 aprendimos a construir ecuaciones paramétricas para una recta. Podemos tomar a $P(3, 2, 1)$ como un punto perteneciente a L , y a $\vec{PQ} = (-4, -4, 2)$ como un vector director para L . Tenemos entonces, para t real:

$$\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 2 - 4t \\ z = 1 + 2t. \end{cases}$$

Luego

$$\vec{r}(t) = (3 - 4t)\vec{i} + (2 - 4t)\vec{j} + (1 + 2t)\vec{k} \quad t \in \mathbb{R}$$

es una representación de L mediante una función vectorial.

■



En el siguiente recurso se puede ver, en forma animada, cómo varía la ubicación del punto $P(f(t), g(t), h(t))$ con t :

<https://ggbm.at/cAd9tpU6>

Grafique la curva paramétrica del Ejemplo 2.1.4 en GeoGebra. Elija 5 valores de t , e indique en el gráfico a qué puntos sobre la recta corresponden, según la parametrización dada. ¿En qué sentido es recorrida la recta, de acuerdo a esta parametrización?

Si se restringe el dominio de $\vec{r}(t)$ al intervalo finito $t \in [0, 1]$, ¿qué curva paramétrica queda representada en este caso?

■ Ejemplo 2.1.5 Parametrización de un segmento.

Determinar una función vectorial para el segmento rectilíneo orientado que va desde el punto $P_0(1, 3, -2)$ hasta el punto $P_1(4, 0, 3)$. Ver Figura 2.1.5.

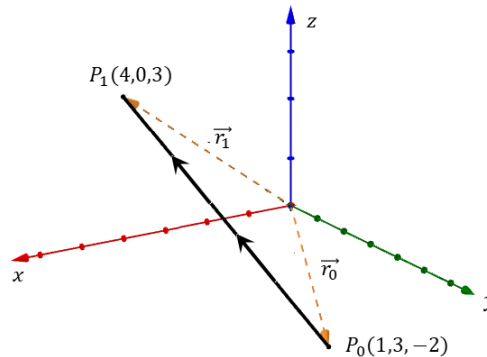


Figura 2.1.5: Segmento rectilíneo orientado que va desde P_0 hasta P_1 .

Recordemos la deducción de las ecuaciones para una recta que pasa por dos puntos dados. Una ecuación vectorial para el segmento que une el punto final del vector $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ con el punto final del vector $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ está dada por:

$$\vec{r}(t) = (1 - t)\vec{r}_0 + t\vec{r}_1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Efectivamente, con esta parametrización se satisface que

$$\vec{r}(t = 0) = \vec{r}_0 \quad \text{y} \quad \vec{r}(t = 1) = \vec{r}_1,$$

y para valores de t crecientes entre 0 y 1 se obtienen los puntos del segmento de P_0 a P_1 . Notar que la parametrización dada puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t(\vec{r}_1 - \vec{r}_0), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

donde reconocemos el punto de referencia P_0 por donde pasa la recta y el vector director $\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$.

Para este ejemplo, tenemos $\vec{r}_0 = (1, 3, -2)$ y $\vec{r}_1 = (4, 0, 3)$. Luego una función vectorial para el segmento orientado que va desde P_0 hasta P_1 es

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (1 - t)(1, 3, -2) + t(4, 0, 3) = (1, 3, -2) + t[(4, 0, 3) - (1, 3, -2)] \\ &= (1 + 3t, 3 - 3t, -2 + 5t), \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 2.1.6** Hélice circular.

Trazar la curva paramétrica determinada por la función vectorial

$$\vec{r}(t) = 2 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j} + 3t \vec{k}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Las funciones componentes de $\vec{r}(t)$ son $f(t) = 2 \cos t$, $g(t) = 2 \sin t$, $h(t) = 3t$, y están definidas para todos los valores reales de t . La curva descrita por $\vec{r}(t)$ es una *hélice* que se desarrolla en la superficie del cilindro circular recto de eje z y radio 2: $x^2 + y^2 = 4$. En efecto, la curva está sobre dicho cilindro ya que las componentes $f(t)$ y $g(t)$ satisfacen la ecuación de la superficie cilíndrica: $x^2 + y^2 = [f(t)]^2 + [g(t)]^2 = 4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t = 4$. Además, la curva “sube” sobre el cilindro a medida que la componente $h(t) = 3t$ aumenta (ver Figura 2.1.6).

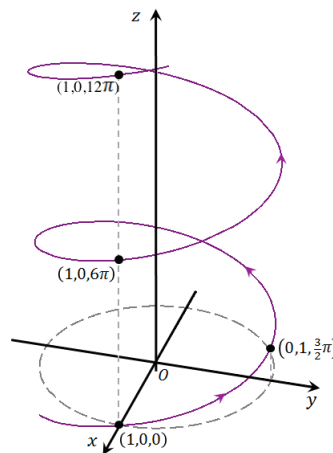


Figura 2.1.6: Hélice circular de eje z , radio 2 y paso 6π .

En este ejemplo, la periodicidad de las funciones componentes en x e y es de 2π ; entonces, cada vez que t aumenta su valor en 2π , la curva completa una vuelta alrededor del cilindro. Pero no vuelve al mismo punto: la distancia (en este caso vertical) entre dos puntos de una hélice que corresponden a una vuelta (en este caso por un cambio de 2π en el parámetro), se llama paso de la hélice. Aquí el paso es $3 \cdot 2\pi = 6\pi \approx 18,85$.

¿Cómo se podría parametrizar una hélice que se desarrolla en la superficie de un cilindro recto de eje z , cuya sección transversal es una elipse (digamos, de semiejes 3 y 5)? Suponga que el paso es el mismo que en el ejemplo resuelto.

■

■ **Ejemplo 2.1.7** Parametrización de la curva determinada por la intersección entre dos superficies.

Considerar la curva determinada por la intersección entre la superficie cilíndrica dada por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ (cilindro circular de eje z y radio 1) y la superficie plana dada por $y + z = 2$ (ver Figura 2.1.7). Encontrar una función vectorial que describa la curva intersección, e indicar el sentido asignado por la parametrización propuesta.

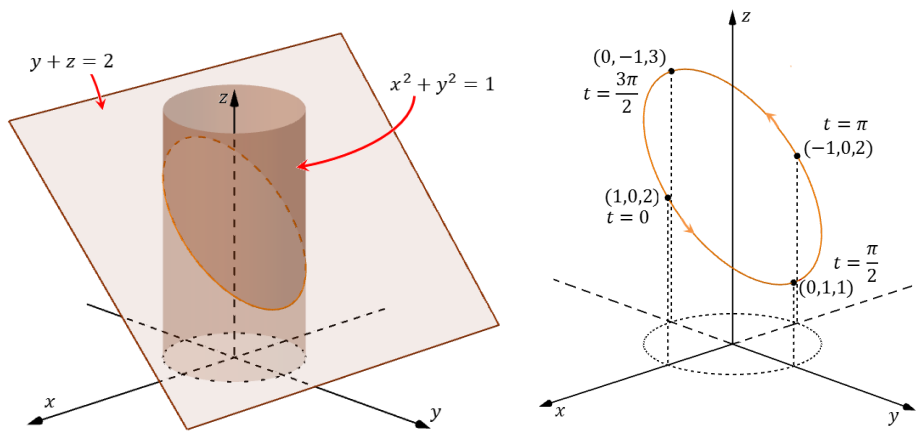


Figura 2.1.7: Elipse como intersección entre un cilindro circular y un plano oblicuo.

A partir de la figura, observamos que la curva intersección entre el cilindro y el plano es una curva cerrada y tiene la forma de una elipse sobre el plano dado. Un punto cualquiera $P(x, y, z)$ que está en la curva pertenece a ambas superficies a la vez, luego debe verificar simultáneamente ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y + z = 2. \end{cases}$$

Buscamos expresar x, y, z en términos de un parámetro t de forma de verificar ambas ecuaciones. Vemos que si tomamos $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ se satisface la ecuación del cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Usando ahora la ecuación del plano tenemos que $z = 2 - y$, luego $z(t) = 2 - y(t)$. Así, una parametrización de la curva intersección es:

$$\vec{r}(t) = \cos t \, \hat{i} + \sin t \, \hat{j} + (2 - \sin t) \, \hat{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

¿Por qué razón hemos restringido el intervalo paramétrico al $[0, 2\pi]$?

Finalmente, el sentido en el cual se recorre la curva paramétrica a medida que aumenta el parámetro t , de acuerdo a la parametrización dada, es sentido antihorario visto desde el semieje z positivo. ■



Estudie el Ejemplo 2.1.7 mediante el siguiente recurso:

<https://ggbm.at/C2cd6T4S>

Parametrización trivial de una curva en el plano que es la gráfica de una función

Dada una función escalar de una variable (como las de Análisis Matemático I) $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la gráfica de F es, como ya sabemos, el conjunto de puntos $\{(x, y) : x \in I, y = F(x)\}$, que ubicados en el plano xy producen una curva. Podemos usar la variable x como parámetro (“trivial”), es decir que para $t \in \mathbb{R}$ definimos $x(t) = t$, luego $y(t) = F(t)$. Y tenemos $\vec{r}(t) = (t, F(t))$ como una función vectorial que parametriza (trivialmente) la curva que es gráfica de la función F . Notar que esa función vectorial le asigna a la curva el sentido de recorrido de izquierda a derecha, pues es en el sentido creciente del parámetro.

Dado que el parámetro es x (la abscisa de los puntos que forman la curva), es común escribir:

$$\vec{r}(x) = (x, F(x)), \quad x \in I.$$

Discuta la siguiente afirmación y dé un ejemplo: Tomando como parámetro $t = -x$ (esto es, definiendo que $x(t) = -t$), se obtiene una parametrización de la misma gráfica pero recorrida en sentido inverso (de derecha a izquierda); se debe tener en cuenta que si $x \in I = [a, b]$, entonces $t = -x \in [-b, -a]$.

Otra caso trivial es cuando los puntos de una curva satisfacen una ecuación de la forma $x = G(y)$ para y en cierto intervalo $J \subset \mathbb{R}$, luego podemos parametrizarla trivialmente tomando a y como el parámetro:

$$\vec{r}(y) = (G(y), y), \quad y \in J.$$

¿Cuál es el sentido de recorrido asignado por esta parametrización?

■ **Ejemplo 2.1.8** Dar una función vectorial que parametrice la gráfica de: a) $F(x) = 1 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$
 b) $G(y) = \cos^2 y$, $y \in \mathbb{R}$. Dibujar.

a) Para describir la curva $y = 1 + x^2$, gráfica de F , podemos usar la variable x como parámetro:

$$x(t) = t, \quad \text{luego} \quad y(t) = 1 + t^2.$$

Así la función vectorial $\vec{r}(t) = t \vec{i} + (1 + t^2) \vec{j}$ con $t \in \mathbb{R}$, genera la curva correspondiente a la gráfica de la función $F(x) = 1 + x^2$, recorrida en el sentido de x creciente (de izquierda a derecha).

b) Para describir la curva $x = \cos^2 y$, gráfica de G , podemos usar la variable y como parámetro:

$$y(t) = t, \quad \text{luego} \quad x(t) = \cos^2 t.$$

Así la función vectorial $\vec{r}(t) = \cos^2 t \vec{i} + t \vec{j}$ con $t \in \mathbb{R}$, genera la curva correspondiente a la gráfica de la función $G(y) = \cos^2 y$, recorrida en sentido de y creciente (de abajo a arriba).

■

Problemas de cruces y de encuentros

Cuando se estudia el movimiento de objetos, según vimos es posible describir sus trayectorias por medio de funciones vectoriales en función del tiempo. Es de interés conocer si, dadas las trayectorias de dos móviles, éstos se encontrarán (en cierto instante) o si sus caminos se cruzan (para instantes diferentes).

■ **Ejemplo 2.1.9** Graficar y parametrizar las siguientes curvas, y determinar si se cortan. En caso afirmativo, indicar los valores de los parámetros y los puntos de cruce y/o de encuentro.

a) La parábola $y = \frac{x^2}{\sqrt{8}}$ y la circunferencia de radio 4 centrada en el origen.

b) La parábola $y = \frac{x^2}{\sqrt{8}}$ y la hipérbola $xy = 8$.

a) La parábola puede parametrizarse trivialmente mediante $\vec{r}_p(x) = \left(x, \frac{x^2}{\sqrt{8}}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, mientras que para la circunferencia podemos usar $\vec{r}_c(t) = (4 \cos t, 4 \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Gráficamente se puede ver que ambas curvas se cortan en dos puntos, ubicados en el primer y segundo cuadrantes. Para hallarlos de manera analítica buscamos dónde coinciden las coordenadas de los puntos de ambas curvas, planteando la igualdad: $\vec{r}_p(x) = \vec{r}_c(t)$, para algún x y algún t (dentro de los dominios paramétricos respectivos). Esto implica hallar, si existen, valores de los parámetros x y t tales que

$$\begin{cases} x = 4 \cos t \\ \frac{x^2}{\sqrt{8}} = 4 \sin t. \end{cases}$$

Elevando ambas ecuaciones al cuadrado y sumándolas, se obtiene $x^2 + \frac{x^4}{8} = 16$

que puede llevarse a la forma $(x^2 + 4)^2 = 144$, cuyas soluciones son $x = \pm\sqrt{8}$. Las soluciones para t dentro del intervalo paramétrico son, respectivamente, $t = \pi/4, 3\pi/4$. Podemos verificar que por un lado $\vec{r}_p(\sqrt{8}) = \vec{r}_c(\pi/4)$, y por el otro $\vec{r}_p(-\sqrt{8}) = \vec{r}_c(3\pi/4)$. Hallamos entonces los dos puntos donde la parábola y la circunferencia *se cruzan*:

$$C_1(\sqrt{8}, \sqrt{8}) \quad \text{y} \quad C_2(-\sqrt{8}, \sqrt{8}).$$

b) Para la parábola usamos $\vec{r}_p(x) = \left(x, \frac{x^2}{\sqrt{8}}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, mientras que para la hipérbola proponemos la parametrización trivial de la curva $x = \frac{8}{y}$, o sea $\vec{r}_h(u) = \left(\frac{8}{u}, u\right)$, $u \in \mathbb{R} - \{0\}$. Gráficamente puede verse que ambas curvas se cortan en un punto del primer cuadrante. Analíticamente, planteamos la igualdad entre las funciones vectoriales: $\vec{r}_p(x) = \vec{r}_h(u)$, para algún x y algún u . Esto implica hallar, si existen, valores de los parámetros x y u tales que

$$\begin{cases} x &= \frac{8}{u} \\ \frac{x^2}{\sqrt{8}} &= u \end{cases}$$

que tiene como única solución $x = \sqrt{8}$ y, correspondientemente, $u = \sqrt{8}$. Podemos verificar que $\vec{r}_p(\sqrt{8}) = \vec{r}_h(\sqrt{8})$. Hallamos entonces el punto donde la parábola y la hipérbola se cortan:

$$E(\sqrt{8}, \sqrt{8}).$$

En este caso, observamos que en E el valor del parámetro x es el mismo valor que toma u , aproximadamente 2.83. Decimos que se trata de un *problema de encuentro*: si un par de objetos se mueven a lo largo de la parábola y la hipérbola, y si el parámetro representa el tiempo, ambos objetos se encuentran (y chocan) en el punto E , en el instante $x = u = \sqrt{8} \simeq 2.83$ segundos.

Notamos, por el contrario, que en el caso *a)* no hay encuentro, sino simplemente las trayectorias se cruzan. Si tanto x como t representan el tiempo, ¿cuál de los objetos llega antes al punto C_1 : el que va por la parábola o el que va por la circunferencia? ■

2.1.2 Ejercicios

- Coloque un lápiz (o lapicera) y una pulsera (o anillo) sobre su mesada. ¿Podría dar funciones vectoriales que los representen en el sistema de coordenadas del aula? Analice intervalo paramétrico y sentido, inducido por la parametrización propuesta.
- En grupo, consigan un reloj (de pulsera o de pared) con agujas. El conjunto de puntos determinado por la punta de una aguja da origen a una circunferencia (imaginaria). ¿Cómo la describiría usando la noción de función vectorial? Discutan cuál sería un parámetro adecuado y su dominio (pensando que el reloj anda durante las 3 horas de clase); cuál es el vector imagen; el sentido de recorrido de la circunferencia; si la curva tiene puntos inicial y final, si es cerrada o no, si da una o varias vueltas. Escriban una función vectorial para cada aguja, si el parámetro es el tiempo medido en minutos.
- Revea la Sección 1.5.1, y describa cada recta por medio de una función vectorial.
- Trace y describa con sus palabras las siguientes curvas paramétricas en el plano xy , indicando el sentido del recorrido (a, b, x_C, y_C son constantes, a y b son positivas). En cada caso, escriba la función vectorial y también la ecuación cartesiana correspondiente.

$$a) \begin{cases} x(t) &= a \operatorname{sen} t \\ y(t) &= a \operatorname{cos} t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 4\pi$$

$$b) \begin{cases} x(t) &= x_C + a \operatorname{cos} t \\ y(t) &= y_C + a \operatorname{sen} t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

- c)
$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \operatorname{sen} t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$
- d)
$$\begin{cases} x(t) = x_C + a \cos t \\ y(t) = y_C + b \operatorname{sen} t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$
5. a) Halle una función vectorial que describa el segmento en el plano xy que va de $P(2, 5)$ a $Q(6, 1)$.
- b) Obtenga una parametrización para la recta que pasa por el punto $A(1, 0, 0)$ y apunta en el sentido del punto $B(3, 6, -2)$.
6. Mencione cinco puntos que pertenezcan a la curva definida por la función vectorial: $\vec{r}(t) = (1+t)\vec{i} + 3t\vec{j} - t\vec{k}$, con $-1 \leq t \leq 2$, e indique el valor correspondiente del parámetro.
7. a) Trace la curva del plano xy dada por la siguiente función vectorial e indique el sentido del recorrido: $\vec{r}(t) = 5 \cos t \vec{i} + 2 \operatorname{sen} t \vec{j}$, con $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
- b) Sea $\vec{r}(T) = 5 \cos(3T) \vec{i} + 2 \operatorname{sen}(3T) \vec{j}$, con $0 \leq T \leq 2\pi$. Esta función vectorial, ¿describe la misma curva que en a)? De no ser así, indique un intervalo de T para el cual se obtenga la misma curva.
8. Dadas las siguientes funciones vectoriales, grafique las curvas que representan:
- a) $\vec{r}(t) = t \vec{i} + \operatorname{sen} t \vec{j}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$
- b) $\vec{r}(t) = t \vec{i} + \cos(2t) \vec{j} + \operatorname{sen}(2t) \vec{k}$, con $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
9. Teniendo en cuenta el Ejemplo 2.1.6 de la hélice circular, analice qué hélices quedan descriptas por las siguientes funciones vectoriales con $t \in \mathbb{R}$:
- a) $\vec{r}_1(t) = \operatorname{sen} t \vec{i} + \cos t \vec{j} + 3t \vec{k}$
- b) $\vec{r}_2(t) = 4 \cos t \vec{i} + 5 \operatorname{sen} t \vec{j} + 3t \vec{k}$
- c) $\vec{r}_3(t) = 3t \vec{i} + \cos t \vec{j} + \operatorname{sen} t \vec{k}$
- d) $\vec{r}_4(t) = 2 \cos t \vec{i} + 2 \operatorname{sen} t \vec{j} - 5t \vec{k}$
- e) $\vec{r}_5(t) = (1 + \cos t) \vec{i} + \operatorname{sen} t \vec{j} + 3t \vec{k}$
10. Analice las diferencias que hay entre las curvas descriptas por las tres maneras siguientes:
- a)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$$
- b) $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \operatorname{sen} t \vec{j} + (3 - \cos t) \vec{k}$, con $0 \leq t \leq \pi$
- c)
$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \\ z(t) = 3 - \cos t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 3\pi$$
11. Considere el movimiento de dos objetos en el espacio tales que, al tiempo t , uno de los objetos está en $P_1(-1+t, 4-t, -1+2t)$ y el otro en $P_2(-7+2t, -6+2t, -1+t)$. Discuta:
- a) ¿Se cruzan las trayectorias de estos objetos? Si es así, indique en qué punto lo hacen.
- b) ¿Chocan los objetos? Si es así, indique dónde (en qué punto del espacio) y cuándo (para qué valor de t) lo hacen.
12. Considere una situación como la del Ejercicio 11 con la diferencia que el vector posición en función del tiempo está dado por $\vec{r}_1(t) = t^2 \vec{i} + 3t \vec{j} + (-3t + 2t^2) \vec{k}$ para una partícula y por $\vec{r}_2(t) = (-1+2t) \vec{i} + (1+2t) \vec{j} + (t^3 - 2) \vec{k}$ para otra. ¿Chocan? Si es así, indique dónde y cuándo.
13. Muestre que la función vectorial $\vec{r}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen}^2 t)$, con $t \in [0, 2\pi]$, representa la curva dada por la intersección entre la superficie del cilindro parabólico $z = x^2$ y la superficie del cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$. Realice un esbozo de la curva que representa esa función vectorial, indicando el sentido de recorrido. ¿A qué se parece? Observando que la

segunda componente al cuadrado más la tercera componente suman 1, exprese la curva como intersección de otro par de superficies.

14. La curva con ecuaciones paramétricas $x(t) = t \cos t$, $y(t) = t \sin t$, $z(t) = t$, para $0 \leq t \leq 4\pi$, ¿se encuentra en la superficie de un cono? Si es así, realice un bosquejo de la curva.
15. ¿En qué puntos del espacio la curva definida por $\vec{r}(t) = t \check{i} + (2t - t^2) \check{k}$ corta al paraboloides $z = x^2 + y^2$? Esboce las gráficas de la curva y del paraboloides, y señale los puntos de intersección.
16. En cada uno de los siguientes casos, halle una función vectorial que describa la curva determinada por la intersección entre las superficies dadas; señale el sentido de recorrido asignado por su parametrización; grafique.
- El plano $z = 1 + y$, y la superficie del semicono $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$.
 - El cilindro parabólico $y = x^2$, y la mitad superior del elipsoide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$.
 - El cilindro circular recto $x^2 + y^2 = 4$, y el paraboloides hiperbólico $z = x^2 - y^2$.

2.2 Derivación e integración de funciones vectoriales

Para funciones vectoriales son válidas todas las operaciones definidas para vectores: suma, multiplicación por un escalar, producto escalar y producto vectorial.

Veremos ahora de qué manera las ideas y conceptos desarrollados en Análisis Matemático I, como límite, continuidad, derivada e integral de una función con valores reales, pueden extenderse a una clase más amplia de funciones: las funciones con valores vectoriales.

2.2.1 Límite y continuidad

El *límite de una función vectorial* se define mediante los límites de sus funciones componentes, suponiendo que éstos existan.

Definición Si $\vec{r}(t) = f(t) \check{i} + g(t) \check{j} + h(t) \check{k}$, el *límite* de la función vectorial $\vec{r}(t)$ cuando t tiende a t_0 es

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \right) \check{i} + \left(\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) \right) \check{j} + \left(\lim_{t \rightarrow t_0} h(t) \right) \check{k}$$

siempre que existan los límites de las funciones componentes.

Los límites de funciones vectoriales siguen las mismas reglas que los límites de funciones escalares de una variable real.

■ **Ejemplo 2.2.1** Si $\vec{r}(t) = \cos t \check{i} + \sin t \check{j} + t \check{k}$, con $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \pi/4} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow \pi/4} \cos t \right) \check{i} + \left(\lim_{t \rightarrow \pi/4} \sin t \right) \check{j} + \left(\lim_{t \rightarrow \pi/4} t \right) \check{k} = \frac{\sqrt{2}}{2} \check{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \check{j} + \frac{\pi}{4} \check{k}.$$

La *continuidad de una función vectorial* se define de manera similar a la continuidad de una función escalar.

Definición Una función vectorial $\vec{r}(t)$ es *continua* en $t = t_0$ si:

- existe $\vec{r}(t_0)$,
- existe $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t)$,
- se verifica que $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

Proposición 2.2.1 Se prueba fácilmente que $\vec{r}(t)$ es continua en t_0 si y sólo si todas sus funciones componentes son continuas en t_0 .

■ **Ejemplo 2.2.2** En el Ejemplo 2.2.1, dado que existe $\vec{r}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\check{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\check{j} + \frac{\pi}{4}\check{k}$ y coincide con $\lim_{t \rightarrow \pi/4} \vec{r}(t)$, la función vectorial resulta continua en $t = \frac{\pi}{4}$; además, sabiendo que las funciones trigonométricas seno y coseno, así como las funciones polinomiales, son continuas para todo valor real, podemos asegurar que la función $\vec{r}(t) = \cos t \check{i} + \sin t \check{j} + t \check{k}$ es continua en \mathbb{R} . ■

Una función vectorial continua define una curva paramétrica continua (esta propiedad nos permitió en el Ejemplo 2.1.1 y otros, “unir los puntos para producir una curva continua”).

2.2.2 Derivación

La derivada de una función vectorial se define de manera análoga a la derivada de una función escalar, mediante un cociente incremental.

Definición La derivada \vec{r}' de la función vectorial $\vec{r}(t)$ respecto del parámetro en $t = t_0$ está dada por

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = \vec{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

si este límite existe. Si existe $\vec{r}'(t_0)$, se dice que la función vectorial $\vec{r}(t)$ es derivable en t_0 .

Proposición 2.2.2 Si las funciones componentes de $\vec{r}(t) = f(t)\check{i} + g(t)\check{j} + h(t)\check{k}$ son derivables para todo $t_0 \in (a, b)$, entonces $\vec{r}(t)$ es derivable en ese intervalo paramétrico, y se satisface que:

$$\vec{r}'(t) = f'(t)\check{i} + g'(t)\check{j} + h'(t)\check{k}, \quad t \in (a, b).$$

■ **Ejemplo 2.2.3** a) La función del Ejemplo 2.2.1 es derivable en todo su dominio. La derivada en $t_0 = \frac{\pi}{4}$ es $\vec{r}'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\check{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\check{j} + 1\check{k}$, y en cualquier $t \in \mathbb{R}$ es $\vec{r}'(t) = -\cos t \check{i} + \sin t \check{k} + 1\check{k}$.
 b) La función vectorial $\vec{R}(t) = t\check{i} + |t|\check{j}$, $t \in \mathbb{R}$ no es derivable en $t = 0$; justifique y grafique. ■

Proposición 2.2.3 — Reglas de derivación. Dado que la derivada de una función vectorial puede calcularse derivando sus funciones componentes, las reglas de derivación son similares a las de funciones de valores reales. Supongamos que \vec{r}_1 y \vec{r}_2 son funciones vectoriales derivables, y a es un escalar, entonces:

- $[\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)]' = \vec{r}'_1(t) + \vec{r}'_2(t)$
- $[a\vec{r}_1(t)]' = a\vec{r}'_1(t)$
- $[\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)]' = \vec{r}'_1(t) \cdot \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}'_2(t)$
- $[\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)]' = \vec{r}'_1(t) \times \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \times \vec{r}'_2(t)$

Funciones compuestas y regla de la cadena

Sea $\vec{r}(u)$ una función vectorial y sea $u(t)$ una función de valores reales, ambas derivables. Luego se puede evaluar la composición de estas funciones: $\vec{r}(u(t)) = \vec{R}(t)$ que depende de t . La derivada

de la función vectorial compuesta (respecto de su variable, t) es

$$\frac{d}{dt} \vec{R}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(u(t)) = \frac{d}{du} \vec{r}(u) \frac{d}{dt} u(t)$$

o sea:

- $[\vec{r}(u(t))]' = \vec{r}'(u) u'(t)$ (Regla de la cadena).

La composición de una función vectorial con una función escalar es útil para *reparametrizar* una curva, esto es, describirla en términos de otro parámetro (que tenga, por ejemplo, cierto dominio o comportamiento deseado, inclusive para invertir el sentido de la curva).

- **Ejemplo 2.2.4** En el Ejemplo 2.1.2b), compruebe $\vec{r}_2(t)$ puede pensarse como la composición de la función vectorial $\vec{r}(u) = (-4 \sin u, 4 \cos u)$, $u \in [0, 4\pi]$, con la función escalar $u(t) = 2t$, $t \in [0, 2\pi]$. La derivada de la función vectorial compuesta resulta $\vec{r}_2(t)' = [\vec{r}(u(t))]' = (-4 \cos u, -4 \sin u) 2 = (-8 \cos(2t), -8 \sin(2t))$, donde al final dimos la expresión en términos de la variable de la función compuesta, t . ■

Vector tangente

En la Figura 2.2.1 se ilustra el significado geométrico de la definición dada para la derivada de una función vectorial. Consideremos una función vectorial $\vec{r}(t)$ cuya representación gráfica es la curva paramétrica de la figura. Los vectores $\vec{r}(t_0)$ y $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$ corresponden a los vectores de posición de los puntos P_0 y P , respectivamente, de la curva. Luego, el vector diferencia $\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$ es igual al vector $\overrightarrow{P_0P}$ que va de P_0 a P . Ver Figura 2.2.1a). Para $\Delta t > 0$ (es el caso mostrado en las figuras), $\overrightarrow{P_0P}/\Delta t$ apunta en el mismo sentido que $\overrightarrow{P_0P}$; para $\Delta t < 0$, $\overrightarrow{P_0P}$ apunta “hacia atrás”, contra el sentido del movimiento (ya que entonces P estaría antes que P_0), sin embargo el cociente $\overrightarrow{P_0P}/\Delta t$ apuntará de nuevo “hacia adelante”, es decir en el sentido de la curva paramétrica.

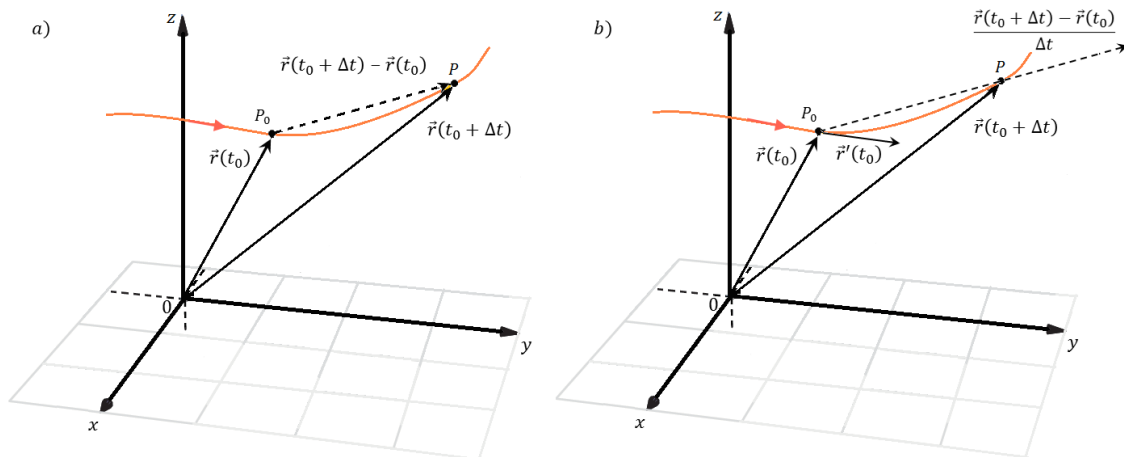


Figura 2.2.1: Derivada de una función vectorial.



Para explorar el comportamiento de $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$, $\vec{r}(t_0)$ y $\vec{r}'(t_0)$ es muy útil el siguiente recurso: <https://ggbm.at/dMjwVta2>

Dibuje lo que ocurre si se toma un Δt más pequeño, y observe cómo va cambiando la dirección entre el punto P_0 y cada nuevo punto P , hasta llegar a ser tangencial. Efectivamente, cuando $\Delta t \rightarrow 0$, el vector $[\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)]/\Delta t$ tiende a un vector que es tangente a la curva en P_0 . Si $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$ entonces se lo define como un *vector tangente* a la curva en P_0 . La *recta tangente* a la curva en P_0 está definida como la recta que pasa por P_0 y tiene como vector director a $\vec{r}'(t_0)$.

Para visualizar esta característica, se dibuja el vector $\vec{r}'(t_0)$ con su punto inicial en P_0 .

Definición Sea P_0 un punto perteneciente a la curva C dada por $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$; por lo tanto P_0 es el punto final de $\vec{r}(t_0)$, para algún $t_0 \in I$. Entonces, si $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$, se tiene que $\vec{r}'(t_0)$ es un *vector tangente* a la curva C en P_0 .

Definición Sea P_0 un punto perteneciente a la curva C dada por $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$; por lo tanto P_0 es el punto final de $\vec{r}(t_0)$, para algún $t_0 \in I$. La *recta tangente* a la curva en el punto P_0 , es la recta paralela a $\vec{r}'(t_0)$ que pasa por P_0 .

Notemos que para indicar la orientación de la recta tangente, se puede dar cualquier vector proporcional a $\vec{r}'(t_0)$. En particular, es útil muchas veces emplear el vector tangente unitario, que se obtiene por normalización:

$$\check{T}(t_0) = \frac{\vec{r}'(t_0)}{|\vec{r}'(t_0)|}$$

si $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$. Notar que tanto \vec{r}' como \check{T} apuntan en el mismo sentido que la curva paramétrica.

■ **Ejemplo 2.2.5** Dada la función vectorial $\vec{r}(t) = (2 - t)\check{i} + \sqrt{t}\check{j}$, con $t \geq 0$, determinar $\vec{r}'(t)$ e indicar su dominio. Hallar vector posición y vector tangente para $t_0 = 4$; graficar la curva paramétrica indicando dichos vectores.

Derivando la función vectorial $\vec{r}(t)$ por componentes (usando las reglas de derivación para funciones escalares aprendidas en Análisis Matemático I), se obtiene

$$\vec{r}'(t) = -\check{i} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\check{j}, \quad t > 0,$$

y observamos que $\vec{r}(t)$ no es derivable en $t = 0$. Para $t_0 = 4$ se tiene $\vec{r}(4) = -2\check{i} + 2\check{j}$, y se puede calcular $\vec{r}'(4)$ “por definición” como $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(4 + \Delta t) - \vec{r}(4)}{\Delta t}$, o “por regla” evaluando $\vec{r}'(t)$ en $t = 4$ (¿podría hacer lo mismo para $t = 0$?, ¿por qué?); resulta $\vec{r}'(4) = -\check{i} + \frac{1}{4}\check{j}$.

Para graficar la curva conviene obtener una expresión usando coordenadas cartesianas. Al eliminar el parámetro entre las ecuaciones $x = 2 - t$ e $y = \sqrt{t}$, se obtiene $x = 2 - y^2$, para $y \geq 0$ (observar que hemos tenido en cuenta que $y = +\sqrt{t}$; luego al despejar t como y^2 , se debe recordar que y no era negativa). Se trata de “la mitad” de una parábola de eje x , con vértice en $V(2, 0)$ y abierta hacia la izquierda; como curva paramétrica, tenemos que decir también el sentido: la rama de la parábola es recorrida de derecha a izquierda (o, también, de abajo hacia arriba), pues cuando el parámetro t aumenta, la abscisa del punto correspondiente de la curva disminuye mientras que la ordenada crece. La curva pasa, por ejemplo, por $P_0(-2, 2)$ (cuando $t = 4$) y en dicho punto el vector $-\check{i} + \frac{1}{4}\check{j}$ es tangente a la curva apuntando (efectivamente) a la izquierda y arriba. Muéstrelos en un gráfico. ■

■ **Ejemplo 2.2.6** Inversión del sentido de una curva paramétrica. La ecuación $y^2 - x^2 = 1$ describe una hipérbola cuyas asíntotas son $y = \pm x$. El tramo que va desde $A(1, \sqrt{2})$ hasta $B(3, \sqrt{10})$ se puede parametrizar mediante $\vec{r}(t) = t\check{i} + \sqrt{1 + t^2}\check{j}$, con $t \in [1, 3]$. Dar una parametrización del tramo de hipérbola pero recorrida desde B hasta A .

Para resolver este problema de invertir el sentido de recorrido proponemos la parametrización \vec{r} pero cambiando t por $-t$; esto es, la función vectorial $-\check{i} + \sqrt{1 + t^2}\check{j}$, con $t \in [-3, -1]$. Efectivamente, esta curva paramétrica empieza en $(-(-3), \sqrt{1 + (-3)^2}) = (3, \sqrt{10})$ y finaliza en $(-(-1), \sqrt{1 + (-1)^2}) = (1, \sqrt{2})$ y el sentido está dado por el vector tangente $-\check{i} + \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\check{j}$. ■

- **Ejemplo 2.2.7** Escribir una ecuación para la recta tangente a la hélice circular dada por $\vec{r}(t) = 4 \cos t \vec{i} + 4 \sin t \vec{j} + 3t \vec{k}$, con $t \in \mathbb{R}$ en el punto P_0 de la hélice que corresponde a $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

Si conseguimos un punto por donde pasa la recta y un vector director, podemos escribir una ecuación de la recta. El punto puede ser P_0 ; buscamos entonces las coordenadas de P_0 , calculando la función vectorial en $t_0 = \frac{\pi}{4}$:

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \cos \frac{\pi}{4} \vec{i} + 4 \sin \frac{\pi}{4} \vec{j} + 3 \frac{\pi}{4} \vec{k} = 2\sqrt{2} \vec{i} + 2\sqrt{2} \vec{j} + \frac{3}{4}\pi \vec{k}$$

de donde se obtiene el punto $P_0(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi)$.

Ahora bien, la dirección tangente a la hélice para un t genérico está dada por el vector

$$\vec{r}'(t) = -4 \sin t \vec{i} + 4 \cos t \vec{j} + 3 \vec{k}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

¿Cuál es la dirección tangente a la hélice en el punto P_0 ? Es la dirección del vector

$$\vec{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \sin \frac{\pi}{4} \vec{i} + 4 \cos \frac{\pi}{4} \vec{j} + 3 \vec{k} = -2\sqrt{2} \vec{i} + 2\sqrt{2} \vec{j} + 3 \vec{k}.$$

Ya tenemos el punto de tangencia P_0 y un vector tangente en ese punto, $\vec{r}'(t_0)$, que podemos usar como vector director; entonces

$$\begin{cases} x &= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}u \\ y &= 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}u \\ z &= \frac{3}{4}\pi + 3u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

son ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la hélice en P_0 (donde denominamos u al parámetro en las ecuaciones de la recta, para diferenciarlo del parámetro t de la curva). ■

- **Ejemplo 2.2.8** Determinar un vector tangente en cada punto de la curva que se obtiene como intersección entre el plano Π cuya ecuación es $z = x$ y la superficie S dada por la ecuación $y = 3x^3 - z^2$. Verificar que, en cada punto de la curva, dicho vector es perpendicular al vector normal al plano Π . ¿Por qué?

Llamemos C a la curva determinada por la intersección entre ambas superficies. Las ecuaciones cartesianas de $C = \Pi \cap S$ son

$$\begin{cases} z &= x \\ y &= 3x^3 - z^2. \end{cases}$$

Tomando a la variable x como parámetro, se tiene “trivialmente” que

$$\vec{r}(t) = (t, 3t^3 - t^2, t)$$

con t variando en \mathbb{R} , es una función vectorial que parametriza a la curva C . Un vector tangente a C en un punto cualquiera $P_0 \in C$, correspondiente a un valor t_0 dado del parámetro, es

$$\vec{r}'(t_0) = (1, 9t_0^2 - 2t_0, 1).$$

Un vector normal al plano $-x + z = 0$ es $\vec{n} = (-1, 0, 1)$. Haciendo el producto escalar $\vec{r}'(t_0) \cdot \vec{n} = (1, 9t_0^2 - 2t_0, 1) \cdot (-1, 0, 1) = 0$, vemos que $\vec{r}'(t_0)$ es perpendicular al vector normal al plano dado, para cualquier t_0 , o sea para cualquier punto P_0 de la curva C . Para explicarlo, notemos que dado que C es intersección de Π y S , la curva pertenece tanto al plano Π como a la superficie S ; en particular, $C \subset \Pi$ (lo que significa que la curva C es

plana, tal como ocurría en el Ejemplo 2.1.7. En consecuencia, un vector tangente a C “debe estar en el plano Π ”; más estrictamente, $\vec{r}'(t_0)$ es paralelo al plano, luego es perpendicular a un vector normal al plano. ■

Curva suave (a trozos)

Un objeto que se mueve en el espacio va trazando una curva imaginaria. El objeto no puede desaparecer y volver a aparecer espontáneamente en otro punto del espacio; ni tampoco cambiar repentinamente la velocidad de su movimiento: un objeto, en general, se mueve siguiendo una curva (imaginaria) que es *suave*.

En general consideraremos funciones vectoriales $\vec{r}(t)$ con $t \in I$, de clase C^1 , que son las funciones derivables con continuidad (o sea, funciones con derivada primera continua) en el intervalo I ; pediremos además que se cumpla $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ para todo t en I . Estas funciones se llaman *funciones vectoriales suaves*.

Si una curva puede ser parametrizada por una función vectorial suave, se dice que es una *curva suave*. Una curva suave admite vector tangente en cada punto, que varía con continuidad a lo largo de la curva.

■ **Ejemplo 2.2.9** La hélice circular del Ejemplo 2.1.6 y la elipse del Ejemplo 2.1.7 son curvas suaves en todo su recorrido. Justificar. ■

Notemos que hay curvas que aunque estén definidas por funciones vectoriales $\vec{r}(t)$ de clase C^1 , presentan sin embargo esquinas puntiagudas o cambios bruscos de dirección. La condición adicional $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ para todo $t \in I$, garantiza la existencia de recta tangente en cada punto de una curva suave (suave a trozos).

En algunas situaciones encontraremos curvas que se forman con la unión sucesiva de varias curvas suaves; la curva completa se llama precisamente *suave por tramos* o *suave a trozos*. Un ejemplo es la curva frontera de un triángulo, que está formada por tres tramos (los lados del triángulo) suaves; para definir la curva completa hará falta una función vectorial diferente para cada tramo. ¿Cómo podría parametrizar la frontera del triángulo con vértices en $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$, recorridos en ese orden? (Observe que el sentido de recorrido de la curva es tal que la región triangular que encierra, queda siempre a la izquierda de la curva frontera; hablaremos un poco más adelante de la orientación de una curva cerrada con respecto a la región encerrada por ella).

Veamos el caso de una curva con picos; que resulta suave a trozos.

■ **Ejemplo 2.2.10** La Figura 2.2.2 muestra una curva conocida como hipocicloide de cuatro picos, definida por $\vec{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. ¿La función vectorial $\vec{r}(t)$ es de clase C^1 ? ¿Qué pasa en los cuatro picos del hipocicloide?

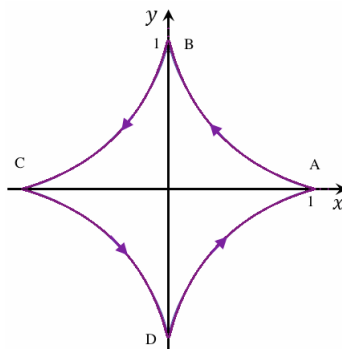


Figura 2.2.2: Hipocicloide de cuatro picos

Derivando la función vectorial, vemos que $\vec{r}'(t) = (-3 \cos^2 t \operatorname{sen} t, 3 \operatorname{sen}^2 t \cos t)$ es una función continua, por lo tanto $\vec{r}(t)$ es de clase C^1 en el intervalo de 0 a 2π . A partir del gráfico, notamos que los picos se encuentran en los puntos $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$ y $D(0, -1)$ de la curva, que corresponden a los valores $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$, y $\frac{3\pi}{2}$ del parámetro, respectivamente. Si calculamos $\vec{r}'(t)$ para el valor de t correspondiente a cada uno de los puntos-pico, tenemos: $\vec{r}'(0) = \vec{r}'(\frac{\pi}{2}) = \vec{r}'(\pi) = \vec{r}'(\frac{3\pi}{2}) = \vec{0}$. La curva cambia bruscamente de dirección en cada uno de los puntos-pico donde, como vemos, no hay recta tangente (ya que el vector nulo no tiene dirección definida); tampoco se puede obtener el vector tangente unitario en esos cuatro puntos. ■

Hay curvas como el contorno del número “8” o la letra “φ” (letra phi griega), tales que se cruzan a sí mismas en uno o más puntos. Veamos un ejemplo.

■ **Ejemplo 2.2.11** Considerar la curva C asociada a la función vectorial $\vec{r}(t) = t^2 \vec{i} + (t^3 - 3t) \vec{j}$, con $-2 \leq t \leq 2$. Mostrar que C tiene dos rectas tangentes en el punto $P(3, 0)$ y encontrar sus ecuaciones.

Las funciones componentes son $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3 - 3t$. Buscamos el o los valores de t que dan el punto $P(3, 0)$; luego hay que resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} t^2 = 3 \\ t^3 - 3t = 0, \end{cases}$$

de donde surgen dos soluciones $t_1 = -\sqrt{3}$ y $t_2 = \sqrt{3}$ (notar que $t_3 = 0$ es solución de la segunda ecuación pero no de la primera). Esto indica que C se cruza a sí misma en $P(3, 0)$, siendo $\vec{r}(-\sqrt{3}) = \vec{r}(\sqrt{3}) = 3\vec{i}$. En coordenadas cartesianas, la curva se expresa como $y = \pm\sqrt{x}(x^2 - 3)$, que puede pensarse como la unión de dos curvas, una correspondiente a la gráfica de la función $F(x) = -\sqrt{x}(x^2 - 3)$ y la otra a $G(x) = \sqrt{x}(x^2 - 3)$. Intente graficarlas usando Geogebra (tiene aproximadamente la forma de una letra α , siendo P el punto de cruce).

A partir de la parametrización dada, calculamos el vector $\vec{r}'(t) = (2t, 3t^2 - 3)$ y evaluamos en t_1 y t_2 . Se obtienen dos vectores diferentes: $\vec{r}'(-\sqrt{3}) = (-2\sqrt{3}, 6)$ y $\vec{r}'(\sqrt{3}) = (2\sqrt{3}, 6)$, lo que indica que en $P(3, 0)$ existen dos rectas tangentes, dependiendo del “instante” (si t fuera el tiempo).

Para el valor $t_1 = -\sqrt{3}$ del parámetro, las ecuaciones paramétricas de una de las rectas tangentes a C en $P(3, 0)$ se pueden obtener como

$$\begin{cases} x = 3 - 2\sqrt{3}u \\ y = 0 + 6u \end{cases}, \quad u \in \mathbb{R},$$

cuya forma cartesiana es $y = -\sqrt{3}(x - 3)$.

Procediendo de manera similar, para $t_2 = \sqrt{3}$ se obtiene la otra recta tangente a C en $P(3, 0)$ mediante las ecuaciones

$$\begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{3}v \\ y = 0 + 6v \end{cases}, \quad v \in \mathbb{R},$$

que en cartesianas se expresa $y = \sqrt{3}(x - 3)$.

Entonces, ambas rectas tangentes pasan por P pero tienen distinta pendiente. Visualice gráficamente. ■

2.2.3 Integración

La integral definida de una función vectorial continua $\vec{r}(t)$ en un intervalo $[a, b]$ del parámetro t , se define de forma similar a la integral de una función con valores reales, pero teniendo en cuenta que ahora el resultado es un vector. La integral de $\vec{r}(t)$ entre $t = a$ y $t = b$ se puede expresar en términos de las integrales de sus funciones componentes.

Definición La *integral definida* de una función vectorial $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ entre $t = a$ y $t = b$ está dada por:

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \left(\int_a^b f(t) dt \right) \vec{i} + \left(\int_a^b g(t) dt \right) \vec{j} + \left(\int_a^b h(t) dt \right) \vec{k}$$

si cada una de las integrales existe.

El Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de Barrow se generalizan para funciones vectoriales continuas, de la siguiente manera:

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \vec{R}(t) \Big|_a^b = \vec{R}(b) - \vec{R}(a)$$

donde \vec{R} es una primitiva de \vec{r} , o sea $\vec{R}'(t) = \vec{r}(t)$.

■ **Ejemplo 2.2.12** Si $\vec{r}(t) = 2 \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + 2t \vec{k}$, evaluar $\int_0^{\pi/2} \vec{r}(t) dt$.

Busquemos primero la familia de primitivas (o integral indefinida) de $\vec{r}(t)$:

$$\begin{aligned} \int \vec{r}(t) dt &= \left(\int 2 \cos t dt \right) \vec{i} + \left(\int \sin t dt \right) \vec{j} + \left(\int 2t dt \right) \vec{k} \\ &= (2 \sin t + c_1) \vec{i} + (-\cos t + c_2) \vec{j} + (t^2 + c_3) \vec{k} \\ &= 2 \sin t \vec{i} - \cos t \vec{j} + t^2 \vec{k} + \vec{c} = \vec{R}(t) \end{aligned}$$

donde $\vec{c} = c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}$ es una constante de integración vectorial. Aplicamos la regla de Barrow:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \vec{r}(t) dt &= \left(2 \sin t \vec{i} - \cos t \vec{j} + t^2 \vec{k} + \vec{c} \right) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \left(2 \vec{i} + \frac{\pi^2}{4} \vec{k} + \vec{c} \right) - (-\vec{j} + \vec{c}) = 2 \vec{i} + \vec{j} + \frac{\pi^2}{4} \vec{k} \end{aligned}$$

(notar que el vector constante de integración se cancela).

La integral definida de $\vec{r}(t)$ de 0 a $\frac{\pi}{2}$ da como resultado el vector $\vec{v} = (2, 1, \frac{\pi^2}{4})$. ■

2.2.4 Ejercicios

- Calcule la derivada de las siguientes funciones vectoriales:
 - $\vec{r}(t) = \vec{i} + \vec{j} + e^{4t} \vec{k}$
 - $\vec{r}(t) = t \cos(3t) \vec{i} + \sin^3 t \vec{j} + \cos^3 t \vec{k}$
- En los siguientes casos grafique la curva plana generada por $\vec{r}(t)$, prestando atención al dominio natural de cada función vectorial. Halle $\vec{r}'(t)$. Además, para el valor dado de t_0 , dibuje el vector $\vec{r}(t_0)$ en posición canónica y el vector tangente $\vec{r}'(t_0)$ donde termina $\vec{r}(t_0)$.
 - $\vec{r}(t) = (1+t)\vec{i} + \sqrt{t}\vec{j}$, $t_0 = 1$
 - $\vec{r}(t) = e^t \vec{i} + e^{3t} \vec{j}$, $t_0 = 0$
- Halle el vector tangente unitario \vec{T} a la curva dada por $\vec{r}(t)$ en el punto correspondiente a t_0 :

- a) $\vec{r}(t) = 2 \cos t \hat{i} + 2 \sin t \hat{j} + \tan t \hat{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$
- b) $\vec{r}(t) = e^{2t} \hat{i} + e^{-2t} \hat{j} + t e^{2t} \hat{k}$, $t_0 = \frac{1}{2}$
4. En cada caso, determine ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva dada C en el punto especificado P (asegúrese previamente de que el punto pertenezca a la curva):
- a) $C : \vec{r}(t) = (1 + 2\sqrt{t}, t^3 - t, t^3 + t)$, $P(3, 0, 2)$
- b) $C : \vec{r}(t) = e^{-t} \cos t \hat{i} + e^{-t} \sin t \hat{j} + e^{-t} \hat{k}$, $P(1, 0, 1)$
5. Sea $C : \vec{r}(t) = \sin(\pi t) \hat{i} + 2 \sin(\pi t) \hat{j} + \cos(\pi t) \hat{k}$, $t \in \mathbb{R}$, una curva paramétrica. Para los puntos de la curva correspondientes a $t = 0$ y a $t = \frac{1}{2}$, determine las rectas tangentes a C y encuentre el punto de intersección entre dichas rectas (si existe). Grafique la curva y ambas rectas, mostrando dónde son tangentes a C y dónde se intersecan.
6. Se desea hallar la recta tangente a la curva dada por $\vec{r}(t) = (t^3 - 4t) \hat{i} + t^2 \hat{j}$ en el punto $P(0, 4)$. ¿Qué dificultad encuentra? Realice un bosquejo de la curva y explique qué ocurre en P .
7. Muestre que la curva definida por $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t \cos t, 3)$ tiene dos rectas tangentes en el punto $(0, 0, 3)$.
8. ¿En qué punto (ó puntos) se intersecan las curvas $C_1 : \vec{r}_1(t) = (t, 1 - t, 3 + t^2)$ y $C_2 : \vec{r}_2(u) = (3 - u, u - 2, u^2)$? Halle el ángulo de intersección entre las curvas en el punto donde se cortan.
9. Evalúe las siguientes integrales:
- a) $\int \left(\frac{4}{1+t^2} \hat{j} + \frac{2t}{1+t^2} \hat{k} \right) dt$
- b) $\int_0^{\pi/2} \left(3 \sin^2 t \cos t \hat{i} + 3 \sin t \cos^2 t \hat{j} + 2 \sin t \cos t \hat{k} \right) dt$
10. Encuentre $\vec{r}(t)$ si $\vec{r}'(t) = t \hat{i} + e^t \hat{j} + te^t \hat{k}$, y se conoce $\vec{r}(0) = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$.

2.3 Longitud de una curva paramétrica

Consideremos una curva C suave en el plano, parametrizada por $\vec{r}(t) = (f(t), g(t))$ con $t \in [a, b]$, de clase C^1 . Dividamos el intervalo paramétrico $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud Δt (entonces $\Delta t = \frac{b-a}{n}$, que será pequeño si tomamos n muy grande).

Sea $t_0 = a$ el parámetro que corresponde al punto inicial $P_0 = A$ de la curva, y $t_n = b$ el parámetro que corresponde al punto final $P_n = B$. Llamemos $t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_n$ (donde $t_i = t_{i-1} + \Delta t$, para cada i) a los valores de t al final de cada subintervalo en la recta paramétrica. Para cada i : $x_i = f(t_i)$ e $y_i = g(t_i)$ son las coordenadas de un punto $P_i(x_i, y_i)$ que está sobre la curva C . La poligonal con vértices $P_0, P_1, \dots, P_{i-1}, P_i, \dots, P_n$ aproxima a la curva C (ver Figura 2.3.1).

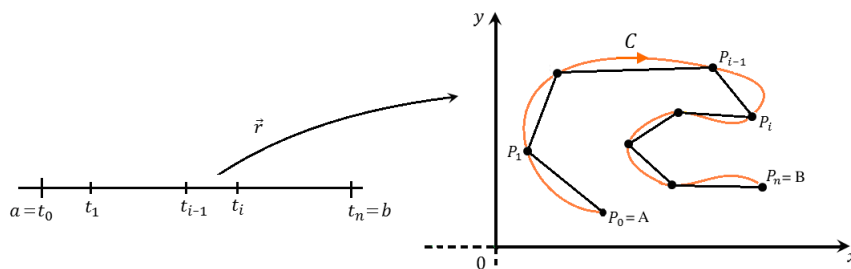


Figura 2.3.1: Aproximación poligonal de C .



Se puede usar el siguiente recurso para visualizar los segmentos de la poligonal para una curva en el espacio:

<https://ggbm.at/TpEvgx73>

Queremos medir la longitud de la curva, aproximándola con la longitud de la poligonal, que es la suma de las longitudes de los n segmentos. Considerando que cuando $n \rightarrow \infty$, la poligonal se aproxima cada vez “mejor” a la curva, definimos la longitud total de la curva C como

$$L_C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left| \overline{P_{i-1}P_i} \right|$$

donde $\left| \overline{P_{i-1}P_i} \right| = \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}$ es la longitud del i -ésimo segmento, que une P_{i-1} con P_i .

El *Teorema del Valor Medio* establece: Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) ; entonces existe (al menos) un $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Aplicamos el teorema a las funciones $f(t)$ y $g(t)$ en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$: siendo f y g continuas, existen valores c_i y d_i en el intervalo (t_{i-1}, t_i) tales que

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(c_i) \Delta t, \quad g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(d_i) \Delta t$$

Entonces, la suma de las longitudes de los segmentos resulta

$$L_C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{f'(c_i)^2 + g'(d_i)^2} \Delta t$$

Esta expresión nos recuerda a una *suma de Riemann* para la función escalar

$$\sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2},$$

pero no es exactamente una suma de Riemann porque en general $c_i \neq d_i$. No obstante, teniendo en cuenta que f' y g' son funciones continuas, se puede probar que el límite existe y que es igual a la integral definida

$$L_C = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt.$$

En el caso de una curva suave en el espacio, parametrizada por $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ de clase C^1 con $t \in [a, b]$, el resultado anterior se generaliza a

$$L_C = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2} dt.$$

El integrando es el módulo del vector tangente $\vec{r}'(t)$. Luego, la *longitud total de una curva* C parametrizada por $\vec{r}(t)$, con $t \in [a, b]$, está dada por

$$L_C = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt.$$

Esta expresión es válida también para curvas suaves por tramos.

- Ⓒ Además, si bien aquí se plantea el cálculo usando una función vectorial particular para describir la curva, se puede probar que la longitud de una curva suave (a trozos) es independiente de la parametrización usada. Notamos que el sentido de recorrido de la curva no afecta al valor de L_C .

■ **Ejemplo 2.3.1** a) Calcular la longitud de la circunferencia del Ejemplo 2.1.2a). b) Idem para la curva del Ejemplo 2.1.2b).

a) Vemos que $|\vec{r}'_1(t)| = |-4 \operatorname{sen} t \hat{i} + 4 \cos t \hat{j}| = \sqrt{16 \operatorname{sen}^2 t + 16 \cos^2 t} = 4$. La longitud de la curva es

$$L_1 = \int_0^{2\pi} |\vec{r}_1'(t)| dt = \int_0^{2\pi} 4 dt = 8\pi.$$

b) Se tiene $|\vec{r}_2'(t)| = |-8 \cos(2t) \hat{i} - 8 \sin(2t) \hat{j}| = 8$. Entonces la longitud de esta curva es

$$L_2 = \int_0^{2\pi} |\vec{r}_2'(t)| dt = \int_0^{2\pi} 8 dt = 16\pi.$$

Notar que $L_1 = 8\pi$ es la longitud de una vuelta de la circunferencia de radio 4. Mientras que L_2 es el doble, porque en este caso la circunferencia es recorrida dos veces por la parametrización dada en el Ejemplo 2.1.2b). ■

Ⓒ Este ejemplo muestra casos particulares de un resultado general. Una circunferencia de radio R puede parametrizarse mediante $\vec{r}(t) = (R \cos t, R \sin t)$, con $t \in [0, 2\pi]$, que da en cada punto vector tangente de módulo constante e igual a R . Luego $L_C = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R$, que es un resultado ya conocido para la longitud de (una vuelta) de circunferencia.

Mencionamos algunos casos para los que es posible hallar una primitiva explícita de $|\vec{r}'|$ y aplicar la regla de Barrow, a fin de obtener la longitud de una curva.

■ **Ejemplo 2.3.2** En el Ejemplo 2.1.1a), la longitud de la curva es infinita; mientras que en el Ejemplo 2.1.1b), la expresión para hallar la longitud de la porción de la parábola $x + 1 = (y - 2)^2$ entre $A(0, 1)$ y $B(8, 5)$, usando la parametrización dada, es $L_C = \int_0^4 \sqrt{1 + 4(t - 1)^2} dt$ (que dejamos aquí planteada).

En el Ejemplo 2.1.5 (compruebe que) la longitud del segmento es igual a la distancia entre $P_0(1, 3, -2)$ y $P_1(4, 0, 3)$.

En el Ejemplo 2.2.10, siendo una curva suave a trozos con 4 secciones de igual longitud (por simetría), es conveniente calcular la longitud de un tramo y multiplicar por 4. Pruebe que se tiene $|\vec{r}'(t)| = 3 \sin(t) \cos(t)$, y que cada arco del hipocicloide mide $\frac{3}{2}$ (un poco más que $\sqrt{2}$, que es la distancia entre dos picos sucesivos); luego la longitud total de ese hipocicloide de cuatro picos es 6. ■

■ **Ejemplo 2.3.3** Calcular la longitud de una vuelta de la hélice circular del Ejemplo 2.1.6.

Vemos que $|\vec{r}'(t)| = |-\sin t \hat{i} + \cos t \hat{j} + 3 \hat{k}| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 9} = \sqrt{10}$. Para calcular la longitud de una vuelta podemos considerar t en el intervalo $[0, 2\pi]$, luego

$$L = \int_0^{2\pi} |\vec{r}'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{10} dt = 2\sqrt{10}\pi. \quad \blacksquare$$

2.3.1 Función longitud de arco

Pensemos en una persona que se encuentra caminando por un sendero en una montaña. El movimiento del senderista puede ser representado por la curva suave $C : \vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ en función del tiempo, habiendo partido de la posición determinada por $\vec{r}(a)$ en el instante $t = a$. Cuando la persona llegue al final del recorrido (la posición $\vec{r}(b)$ en el instante $t = b$), habrá caminado

L_C metros (suponiendo que las distancias se miden en esta unidad). En un instante intermedio t , ¿cuántos metros habrá recorrido?

En el instante t la persona llegó al punto del sendero $P(f(t), g(t), h(t))$, habiendo comenzado su recorrido en $A(f(a), g(a), h(a))$. Es decir que caminó la porción del sendero comprendida entre los puntos A y P . Calculamos entonces la longitud de la porción de curva entre estos puntos. Teniendo en cuenta que la longitud total de la curva (desde A para $t = a$, hasta B para $t = b$) es $\int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$, la longitud de la porción de curva entre los puntos que corresponden a los valores a y t del parámetro, estará dada por

$$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(u)| du$$

que depende del instante t (llamamos u a la variable muda de integración). Queda así definida una función, para t entre a y b , da la medida de la porción de la curva C desde el inicio hasta el instante t . La función $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se llama *función longitud de arco* o *función longitud de curva*.

Veamos algunas propiedades interesantes de la función longitud de arco $s(t)$:

1. $\text{Dom}(s) = [a, b]$ e $\text{Im}(s) = [0, L_C]$, siendo $s(a) = 0$ y $s(b) = L_C$.
2. $s(t)$ es una función continua y derivable para $t \in (a, b)$, siendo $s'(t) = |\vec{r}'(t)|$.
3. $s(t)$ es una función estrictamente creciente y por lo tanto admite inversa en $[a, b]$.
4. $t(s)$, función inversa de $s(t)$, tiene dominio $[0, L_C]$ e imagen $[a, b]$; es continua y derivable, siendo $t'(s) = \frac{1}{|\vec{r}'(t(s))|}$.

Las demostraciones de estas propiedades son sencillas:

1. Por definición, $s(a) = \int_a^a |\vec{r}'(u)| du = 0$ (la longitud de un punto es nula), mientras que

$$s(b) = \int_a^b |\vec{r}'(u)| du = L_C \quad (\text{la longitud de toda la curva es } L_C). \text{ Se tiene}$$

$$s : [a, b] \rightarrow [0, L_C].$$

2. Por el Teorema Fundamental del Cálculo ¹, la derivada de $s(t)$ es igual al integrando evaluado en t . Destacamos esta relación, que usaremos más adelante:

$$\frac{d}{dt}s(t) = |\vec{r}'(t)|.$$

3. Dado que $s'(t)$ es el módulo de un vector, no puede ser negativa; además, como la curva es suave, se tiene $|\vec{r}'(t)| \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$. Entonces $s'(t) > 0$, de donde $s(t)$ resulta una función estrictamente creciente. Efectivamente, la longitud de curva crece siempre, desde 0 en $t = a$ hasta L_C en $t = b$.
4. Recordamos de Análisis Matemático I que si $f(x)$ es invertible, sabemos que existe f^{-1} y que la derivada de f^{-1} es la inversa (multiplicativa) de la derivada de f . Llamemos $t(s)$ a la función inversa de $s(t)$. Vemos que expresa el tiempo transcurrido en función del camino recorrido, que $t : [0, L_C] \rightarrow [a, b]$, y que su derivada está dada por

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{|\vec{r}'(t(s))|}.$$

2.3.2 Ejercicios

1. Tomen un tubo de cartón y una cinta métrica. Enrollen la cinta alrededor del tubo en forma helicoidal, eligiendo un paso que sea: a) la mitad, b) igual, c) el doble del diámetro del tubo. En cada caso, midan la longitud de una vuelta de hélice y verifiquen la expresión analítica hallada en el Ejemplo 2.1.6.

¹Teorema Fundamental del Cálculo: Sea $f(x)$ continua en $[a, b]$, y sea $F(t) = \int_a^t f(x) dx$. Entonces $\frac{d}{dt}F(t) = f(t)$.

2. ¿Cuál es la longitud de la curva plana dada por $\vec{r}(t) = e^t \cos t \vec{i} + e^t \sin t \vec{j}$, con $0 \leq t \leq 1$?
3. Calcule la longitud del arco definido por la función vectorial $\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ desde $A(1, 0, 1)$ hasta $B(-e^\pi, 0, e^\pi)$.
4. Considere una vuelta de hélice circular de radio 2 y paso 2π . Dé alguna parametrización para la curva y calcule su longitud.
Compare con los cálculos hechos por otros compañeros, que probablemente hayan usado otra parametrización (inclusive pueden haber ubicado la hélice con un eje diferente), y verifique que todos obtienen el mismo resultado para la longitud.
5. Una curva C está descrita por $\vec{r}(t) = 3 \cosh(2t) \vec{i} + 3 \sinh(2t) \vec{j} + 6t \vec{k}$, con $0 \leq t \leq 1$. Halle la función longitud de arco y verifique que cumple con las propiedades demostradas. Muestre, en particular, que la derivada de $s(t)$ coincide con $|\vec{r}'(t)|$.

2.4 Aplicación: Movimiento en el espacio

Veamos cómo se pueden usar las ideas discutidas en este capítulo, para estudiar el movimiento de un objeto que describe cierta trayectoria en el espacio (o en el plano).

Pensemos en un objeto que se mueve a lo largo de una curva (imaginaria) descrita por $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$, con $t \in [t_0, t_F]$. Aquí \vec{r} indica la posición espacial del objeto y t indica el tiempo. Las componentes de \vec{r} tienen unidades de longitud (como el metro), y t digamos que se mide en segundos. En el instante t el objeto se encuentra en el punto P de coordenadas $(f(t), g(t), h(t))$.

Las magnitudes vectoriales de interés físico son las siguientes:

- El *desplazamiento* entre el instante inicial y el instante t está dado por el vector $\overrightarrow{P_0P} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$.
- La *velocidad* del objeto en el instante t , está dada por la función vectorial:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t).$$

Para representar gráficamente la velocidad, se ubica el vector $\vec{v}(t)$ con su punto inicial (no en posición canónica sino) en el punto $P(f(t), g(t), h(t))$ donde se encuentra el objeto en ese instante. De esta forma, el vector velocidad en el instante t es un vector tangente a la curva en P , e indica el cambio instantáneo de posición.

- La *aceleración* del objeto en el instante t está dada por la función vectorial:

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t).$$

También las siguientes magnitudes escalares son relevantes para estudiar objetos en movimiento:

- La *rapidez* con que se mueve el objeto en el instante t es el módulo del vector velocidad:

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = |\vec{r}'(t)|.$$

Esta función escalar se mide en unidades de metros/segundo.

- La *distancia* recorrida por el objeto a lo largo de la trayectoria durante el intervalo de tiempo $[t_0, t]$, puede ser evaluada mediante la integral:

$$d(t) = \int_{t_0}^t |\vec{v}(u)| du.$$

Es la longitud de la porción de curva que está entre el punto inicial $P_0(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ y el punto $P(f(t), g(t), h(t))$. La distancia total recorrida por el objeto será entonces

$$L = d(t_F) = \int_{t_0}^{t_F} |\vec{r}'(u)| du.$$

Supongamos ahora que para un móvil se conoce la aceleración en función del tiempo. Integrando esta función vectorial en un dado intervalo temporal, se obtiene el *cambio de velocidad* del móvil en dicho intervalo:

$$\int_{t_0}^t \vec{a}(u) du = \vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)$$

de acuerdo a la regla de Barrow, siendo $\vec{v}(t)$ una primitiva de $\vec{a}(t)$ pues, justamente, $\vec{v}'(t) = \vec{a}(t)$. De aquí se obtiene entonces la velocidad al instante t , conociendo la aceleración:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(u) du.$$

Notar que se necesita conocer el dato de la velocidad inicial.

De manera similar, integrando la velocidad en un intervalo temporal dado, y teniendo como dato la posición inicial, se obtiene *el cambio de posición* (o desplazamiento) del móvil en dicho intervalo. ¿Cómo se expresa entonces la posición al instante t , conociendo la velocidad?

- **Ejemplo 2.4.1** En el problema de encuentro del Ejemplo 2.1.9b), las velocidades de los objetos moviéndose a lo largo de una parábola y una hipérbola son, respectivamente: $\vec{v}_p(t) = \dot{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}t\dot{j}$ y $\vec{v}_h(t) = -\frac{8}{t^2}\dot{i} + \dot{j}$. ¿Con qué velocidades chocan? ¿Cuál de los móviles iba más rápido en ese instante? ■

- **Ejemplo 2.4.2** Disparo de un proyectil ideal: tiro oblicuo.

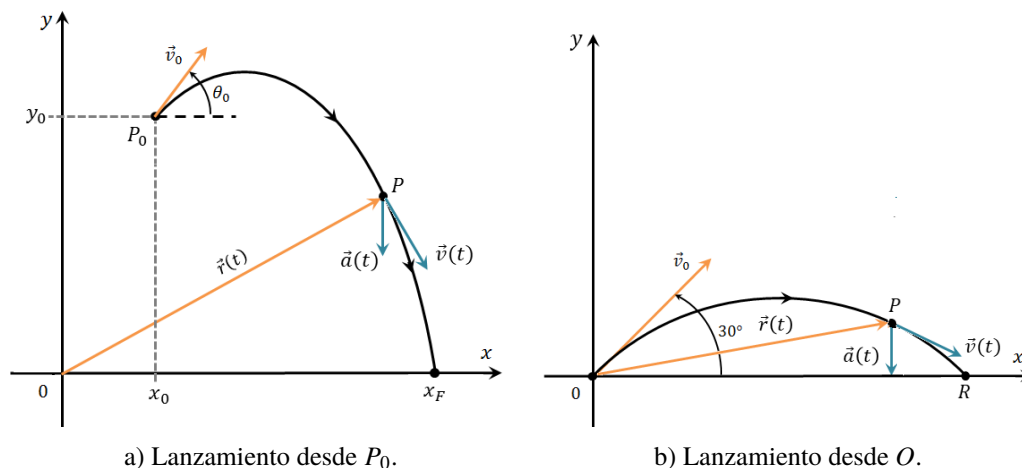


Figura 2.4.1: Tiro Oblicuo.

Se lanza un proyectil en el instante t_0 desde el punto $P_0(x_0, y_0)$ con una velocidad inicial $\vec{v}_0 = v_{0x}\dot{i} + v_{0y}\dot{j}$ (en m/s). Ver Figura 2.4.1 a). La única fuerza que actúa sobre el proyectil durante su vuelo (despreciando la resistencia del aire) es el peso $-mg\dot{j}$, donde m es la masa del proyectil y $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ es la aceleración de la gravedad. El movimiento del proyectil está dado por:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \\ y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \end{cases}$$

para todo $t \in [t_0, t_F]$, donde t_F es el instante final en el cual el proyectil choca contra el piso.

- a) Escribir una función vectorial para representar la posición del proyectil. ¿Cuáles son los vectores posición inicial y final del movimiento? Dar las funciones vectoriales que describen la velocidad y la aceleración en función t , y mostrarlos en un gráfico.
- b) Suponer que el proyectil es lanzado desde el origen en el instante $t_0 = 0$ s, con una rapidez inicial de 10 m/s formando un ángulo de 30° con la horizontal. Ver Figura 2.4.1 b). Escribir la función vectorial para la posición, y mostrar que la trayectoria es una parábola. ¿Cuál es el alcance R de este proyectil, y en qué momentos toca el suelo?
- a) La función vectorial que describe la posición del proyectil en cada instante de su movimiento es:

$$\vec{r}(t) = [x_0 + v_{0x}(t - t_0)] \vec{i} + \left[y_0 + v_{0y}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \right] \vec{j}, \quad t \in [t_0, t_F].$$

En $t = t_0$ se tiene, por supuesto, $\vec{r}(t_0) = (x_0, y_0) = \overrightarrow{OP_0}$. En $t = t_F$ resulta $\vec{r}(t_F) = (x_F, 0) = \overrightarrow{OP_F}$.

Derivando $\vec{r}(t)$ se obtiene:

$$\vec{v}(t) = v_{0x}\vec{i} + (v_{0y} - gt)\vec{j}, \quad t \in [t_0, t_F],$$

y derivando $\vec{v}(t)$ resulta:

$$\vec{a}(t) = -g\vec{j}, \quad t \in [t_0, t_F].$$

En la gráfica dibujamos el vector $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$ apoyado en el punto P y tangente a la curva imaginaria parametrizada por $\vec{r}(t)$. Para el vector $\vec{a}(t)$ tenemos, en este ejemplo, que apunta hacia abajo en todo momento y tienen módulo constante.

- b) Si el proyectil es lanzado en $t_0 = 0$ segundos desde O , entonces $x_0 = y_0 = 0$ m. Las componentes de la velocidad inicial son $v_{0x} = |\vec{v}_0| \cos \theta_0 = 5\sqrt{3}$ m/s, $v_{0y} = |\vec{v}_0| \sin \theta_0 = 5$ m/s. Se obtiene entonces para este caso:

$$\vec{r}(t) = 5\sqrt{3}t\vec{i} + (5t - 4.9t^2)\vec{j}, \quad t \in [0, t_F],$$

lo que indica que al tiempo t el proyectil se encuentra en el punto de coordenadas:

$$\begin{cases} x = 5\sqrt{3}t \\ y = 5t - 4.9t^2 \end{cases}.$$

Para hallar la trayectoria en coordenadas cartesianas, se elimina el parámetro t entre estas ecuaciones, y se obtiene la curva $y = -\frac{4.9}{75}x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x$, que es efectivamente una parábola de eje vertical, con ramas hacia abajo y vértice en (4.4, 1.3).

Para determinar t_F , planteamos que la altura del proyectil sea cero. La ecuación $5t - 4.9t^2 = 0$ tiene dos soluciones: $t = 0$ s (instante inicial, el objeto parte del piso) y $t = \frac{5}{4.9}$ s ≈ 1.02 s (instante final, el objeto choca con el piso). Resulta entonces

que el alcance del proyectil es $R = x_F - x_0 = x\left(\frac{5}{4.9}\right) - 0 = \frac{25\sqrt{3}}{4.9}$ m ≈ 8.8 m. ■



Utilizar el siguiente recurso para determinar en forma animada la posición final del proyectil en un tiro oblicuo.

<https://ggbm.at/v7FvgJrS>

■ **Ejemplo 2.4.3** Vuelo de un planeador.

Un planeador vuela en espiral hacia arriba debido a una corriente de aire de rápido ascenso, de tal forma que su vector posición es $\vec{r}(t) = 3 \cos t \vec{i} + 3 \sin t \vec{j} + t^2 \vec{k}$, $t \geq 0$. La trayectoria es similar a la de una hélice circular (aunque no es una hélice, ¿por qué?). Esbozar la gráfica para $0 \leq t \leq 4\pi$. Determinar:

- La velocidad y la aceleración en el instante t .
- La rapidez del planeador en el instante t .
- El momento en el que la aceleración del planeador es ortogonal a su velocidad, si es que ello ocurre.

a) Derivando sucesivamente $\vec{r}(t)$ obtenemos la velocidad

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = -3 \sin t \vec{i} + 3 \cos t \vec{j} + 2t \vec{k}$$

y la aceleración

$$\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = -3 \cos t \vec{i} - 3 \sin t \vec{j} + 2 \vec{k}$$

como funciones vectoriales de $t \geq 0$.

b) La rapidez, es el módulo del vector velocidad:

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{(-3 \sin t)^2 + (3 \cos t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9 + 4t^2}, \quad t \geq 0.$$

c) Para determinar en qué momento(s) \vec{v} y \vec{a} son ortogonales, buscamos valores de t para los cuales

$$0 = \vec{v} \cdot \vec{a} = 9 \sin t \cos t - 9 \cos t \sin t + 4t = 4t.$$

Así, en este caso, el único instante en que el vector aceleración es perpendicular al vector velocidad es cuando $t = 0$, esto es, en el punto inicial $(3, 0, 0)$. ■

2.4.1 Ejercicios

- Encuentre la velocidad, aceleración y rapidez de un objeto si la posición está dada por $\vec{r}(t) = t \vec{i} + t^2 \vec{j} + 2 \vec{k}$. Trace la trayectoria del objeto y dibuje los vectores velocidad y aceleración para $t = 1$ s y $t = 2$ s.
- Determine para $t \geq 0$ los vectores velocidad y posición de un objeto que tiene aceleración dada por $\vec{a}(t) = \vec{i} + 2 \vec{j}$, sabiendo que la velocidad y posición iniciales son $\vec{v}(0) = \vec{k}$ y $\vec{r}(0) = \vec{0}$, respectivamente.
- Movimiento circular uniforme.
La función vectorial $\vec{r}(t) = A \cos t \vec{i} + A \sin t \vec{j}$, con $t \in [0, 2\pi]$ en segundos, describe la posición de un objeto que realiza un recorrido circular alrededor del origen, a una distancia A del mismo. Considere $A = 4$ cm (recordar el Ejemplo 2.1.2).
 - ¿Cuáles son los puntos inicial y final de la trayectoria? ¿En qué lugar se encuentra el objeto en los instantes $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, π y $\frac{3\pi}{2}$? ¿Cuál es el sentido del recorrido? Grafique.
 - Calcule las funciones velocidad y aceleración. Evalúe dichas funciones en los instantes dados en a). Grafique los vectores obtenidos, ubicándolos en la posición del objeto en cada instante.
 - Pruebe que en este caso $\vec{v}(t)$ es perpendicular al vector posición $\vec{r}(t)$, y que $\vec{a}(t)$ apunta hacia el centro de la circunferencia para todo t . Muestre que la rapidez es constante.
- En su recorrido, un objeto genera una curva C representada por la función vectorial $\vec{r}(t) = (\sqrt{5} \sin t, \sqrt{5} \cos t, 2t)$, donde $t \geq 0$ denota el tiempo en segundos.
 - Suponiendo que el trayecto que realiza el objeto es medido en metros y comienza en el punto $(0, \sqrt{5}, 0)$, encuentre el punto Q al que llega el objeto si recorrió 3π metros.
 - ¿Cuál es la velocidad del objeto en Q ?

2.5 Actividades integradoras y autoevaluación

2.5.1 Actividades integradoras

- ¿Cómo se puede cambiar la orientación de una curva $C : \vec{r}(t)$ con $t \in [a, b]$?
- La función vectorial $\vec{r}(t) = (t, 2t + 3)$, con $-\infty < t < \infty$, parametriza una recta en el plano.
 - $\vec{r}_1(t) = (t^3, 2t^3 + 3)$ también parametriza una recta en el plano. ¿Qué diferencia hay?
 - La función $\vec{r}_2(t) = (t^2, 2t^2 + 3)$, ¿qué curva representa?
- Tiro vertical.
Tome una pelotita de ping pong y arrójela hacia arriba. Escriba una función vectorial que represente la posición del móvil, indicando las funciones componentes y su dominio (recuerde el Ejemplo 8 sobre Tiro oblicuo, y adapte a esta situación). Obtenga luego las funciones vectoriales que correspondan a velocidad y aceleración.
- Encuentre ecuaciones paramétricas para las siguientes rectas:
 - La recta que pasa por los puntos $P(2, 3, -1)$ y $Q(5, 2, 0)$.
 - La recta que apunta en la dirección del vector $\vec{u} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ y pasa por el punto $R(1, 2, 3)$.
 - ¿Se intersecan las rectas dadas en los incisos a) y b)?
- Escriba la familia de todos los “camino” rectos en el plano que pasan por $O(0, 0)$. Idem utilizando parábolas de eje y y parábolas de eje x , con vértice en $O(0, 0)$.
- Construya una hélice cónica utilizando, por ejemplo, un cucurucho como soporte y un trozo de alambre de aluminio; luego retire el soporte y estudie la “curva” fabricada.
 - Aplaste la curva hasta hacerla plana, ¿qué curva obtiene como proyección de la hélice cónica?
- Un tobogán con forma helicoidal de 1.5 m de radio, tiene 2 m de altura y da un giro completo desde arriba hasta abajo. Halle una función vectorial que modele la línea central del tobogán.
- Si la aceleración de un móvil está dada por $\vec{a}(t) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ para $t \geq 0$ con $\vec{v}(0) = \vec{0}$ (el móvil parte del reposo) y $\vec{r}(0) = \vec{i} + \vec{j}$, ¿cuáles son las funciones velocidad y posición del móvil? ¿Cuál es la posición en $t = 2$ s?
- Halle el vector velocidad y la rapidez con que se mueve un objeto sobre una circunferencia de radio R (en cm) parametrizada por la función vectorial $\vec{r}(t) = R \cos(\omega t) \vec{i} + R \sin(\omega t) \vec{j}$, donde ω es la velocidad angular (en rad/s) constante. Compruebe que el vector velocidad es ortogonal al vector posición, para cualquier instante. Halle el vector aceleración y verifique que apunta hacia el centro de la circunferencia. Calcule el módulo del vector aceleración. Grafique, indicando los vectores $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$ para 4 valores de t elegidos (tome $R = 3$ cm y $\omega = 6\pi$ rad/s).
- Sea C una curva en el espacio y $\vec{r}(t)$ una parametrización de la misma.
 - Halle $\vec{r}(t)$ si $\vec{r}'(t) = -3 \sin t \vec{i} + 3 \cos t \vec{j} + 4 \vec{k}$ y $\vec{r}(0) = 3 \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
 - Obtenga una ecuación para la recta tangente a C en el punto $P_0(3, 1, -1)$.
 - Encuentre la función longitud de arco $s(t)$ medida desde el punto en el cual $t = 0$ y en la dirección creciente de t .
- Halle una función vectorial que describa la frontera de la región del primer cuadrante limitada por las curvas $y = 4x$, $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, recorrida en sentido antihorario. Encuentre un vector tangente a la curva en $P(\frac{3}{4}, \frac{4}{3})$. ¿En qué puntos no se puede definir un vector tangente a la curva dada? Justifique.
- Parametrice el borde C del semicírculo de radio 1 centrado en el origen, en el semiplano superior. Asigne sentido antihorario (o “sentido positivo”) a la curva paramétrica, de tal forma que los puntos del semicírculo quedan a la izquierda de C .
- Dada $C : \vec{r}(t) = (2t^{3/2}, \cos(2t), \sin(2t))$ con $t \in [\frac{1}{3}, \frac{4}{9}]$, calcule la longitud de C .
- Dada una curva con ecuación cartesiana $C_k : x^2 + y^2 = k$ (con k constante positiva, fija):
 - dé una parametrización para la curva C_k ;
 - halle un vector normal a C_k en el punto $P(0, \sqrt{k})$;
 - grafique para distintos k .

2.5.2 Autoevaluación

Se propone que resuelva los siguientes ejercicios (del estilo de los que podrían plantearse en un parcial de la materia), en forma individual y dedicando aproximadamente 30 minutos en total. Justifique cada uno de los pasos en sus demostraciones teóricas; los cálculos numéricos puede dejarlos expresados (no es necesario el uso de la calculadora, a menos que necesite comparar valores numéricos).

1. Dada la hélice $\vec{r}(t) = (R \cos t, R \sin t, \sqrt{1 - R^2} t)$, con $t \in [0, 2\pi]$, siendo R una constante fija perteneciente al intervalo $(0, 1)$:
 - a) halle una ecuación de la recta tangente a la hélice, en el punto $(0, R, \frac{1}{2} \sqrt{1 - R^2} \pi)$;
 - b) calcule la longitud de una vuelta de esta hélice;
 - c) halle la función longitud de arco $s(t)$.
2. Defina una función vectorial que represente a la curva del espacio determinada por la intersección de las superficies $(x - 1)^2 + z^2 = 4$ y $z - y = 0$. Indique en un gráfico el sentido de recorrido asignado por la parametrización propuesta.
3. Considere el movimiento de un objeto descrito por la función vectorial

$$\vec{r}(t) = 3 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \vec{i} + 3 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \vec{j}$$

donde $t \geq 0$ indica el tiempo transcurrido, en segundos.

- a) ¿Qué tipo de movimiento describe este objeto? Grafique la curva paramétrica en el plano.
- b) Para $t = \frac{\pi}{2}$, calcule los vectores velocidad y aceleración. Indique en el gráfico el correspondiente vector de posición y dibuje en su extremo la velocidad y la aceleración calculadas.
- c) Calcule la rapidez con que se mueve el objeto. ¿Depende del punto donde se encuentra?

3

Funciones escalares de varias variables

3.1	Funciones escalares de varias variables	88
3.1.1	Funciones escalares de dos variables	88
3.1.2	Funciones escalares de tres variables	97
3.1.3	Ejercicios	99
3.2	Límite y continuidad	100
3.2.1	Ejercicios	107
3.3	Derivadas parciales	108
3.3.1	Ejercicios	114
3.4	Diferenciabilidad, aproximación lineal y plano tangente	115
3.4.1	Diferenciabilidad	115
3.4.2	Plano tangente	117
3.4.3	Aproximación lineal	118
3.4.4	Ejercicios	120
3.5	Composición de funciones de varias variables. Reglas de la cadena.	120
3.5.1	Composición de funciones de varias variables.	120
3.5.2	Reglas de la cadena para derivar funciones compuestas de varias variables	122
3.5.3	Ejercicios	125
3.6	Más sobre cambios de una función de varias variables	126
3.6.1	Derivadas direccionales	126
3.6.2	Vector gradiente	131
3.6.3	Dirección de máximo crecimiento	132
3.6.4	Derivada direccional y curvas de nivel	132
3.6.5	Derivada direccional y superficies de nivel	135
3.6.6	Derivación parcial implícita	136
3.6.7	Ejercicios	138
3.7	Anexo A. Derivadas de órdenes superiores para funciones compuestas	139
3.8	Actividades integradoras y autoevaluación	139
3.8.1	Actividades integradoras	139
3.8.2	Autoevaluación	142

3.1 Funciones escalares de varias variables

En general, al estudiar fenómenos del mundo real es usual que una cantidad dependa de más de una variable. Por ejemplo, el servicio meteorológico (<https://www.smn.gov.ar>) informa el índice de sensación térmica I que refleja el efecto del viento en la temperatura real del aire; este índice combina, la velocidad v del viento y la temperatura real T , mediante una *función de dos variables*: $I(v, T)$.

Un objeto sólido puede estar hecho de un material no uniforme, de modo que la densidad ρ de masa por unidad de volumen varía punto a punto, mediante una *función de tres variables*: $\rho(x, y, z)$.

Por otro lado, si en un laboratorio se quiere especificar la tasa de reacción R de una solución que consta de cuatro sustancias químicas en proporciones a, b, c, d , se requiere una *función de cuatro variables*: $R(a, b, c, d)$.

Para encarar el estudio de este tipo de situaciones es necesario ampliar las ideas del cálculo de funciones de una variable, a *funciones escalares de varias variables*. Una *función real f de n variables* es una regla que asigna a cada n -upla ordenada de números reales (x_1, x_2, \dots, x_n) , un único número real $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Se llama *dominio* de f , $\text{Dom}(f)$, al subconjunto de \mathbb{R}^n en el cual está definida la función f . La *imagen* o *rango* de f , $\text{Im}(f)$, es el subconjunto de \mathbb{R} formado por los valores que toma la función f . Escribimos $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donde D indica el dominio de la función. Si no se aclara ninguna condición especial sobre el dominio de f , se entenderá que $\text{Dom}(f)$ es el “dominio natural”, es decir, el conjunto de todas aquellas n -uplas de números reales (x_1, x_2, \dots, x_n) para las cuales la expresión que define a f es un número real bien definido.

En líneas generales, vamos a revisar conceptos dado en Análisis Matemático I, pero extendiendo ahora a más de una variable. En este capítulo veremos, entre otras cosas, cómo representar gráficamente una función con 2 o con 3 variables, y cómo describir los cambios parciales que sufre una función cuando cambia alguna de sus variables (esto conduce a la noción de “derivación parcial”). En el Capítulo 4 estudiaremos cómo caracterizar los puntos críticos en la búsqueda de valores máximos y mínimos de una función multivariable, y en el Capítulo 5 nos ocuparemos de integración de este tipo de funciones.

Nos concentraremos en el estudio de funciones de $n = 2$ o de $n = 3$ variables. La mayoría de las aplicaciones que veremos se refieren a problemas que se pueden modelar en términos de 2 o 3 cantidades. Intentaremos en la medida de lo posible interpretar gráficamente las situaciones que se presenten, mediante dibujos en el plano y en el espacio.

3.1.1 Funciones escalares de dos variables

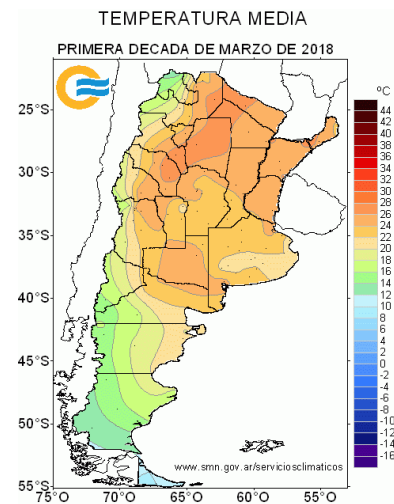
Definición Una *función real f de dos variables* es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) , un único número real $f(x, y)$.

El *dominio* de f es el subconjunto de \mathbb{R}^2 en el cual está definida la función; es decir que el dominio de una función de dos variables se representa como una región del plano. El *dominio natural* de una función f de dos variables es el conjunto de todos aquellos puntos del plano para los cuales $f(x, y)$ es un número real bien definido.

La *imagen* de f es el subconjunto de \mathbb{R} formado por los valores que toma la función f .

Escribimos:

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$



Para $(x, y) \in D = \text{Dom}(f)$ se suele escribir $z = f(x, y)$, donde queda explícitamente definido que z es el valor que toma la función f al evaluarla en el par ordenado (x, y) . Las variables x e y son llamadas *variables independientes*, y z es la *variable dependiente*. Por ejemplo dada $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$, el resultado de evaluar f en $(-1, 1)$ es $f(-1, 1) = 0$, y f en $(1, 2)$ vale $f(1, 2) = 1$; pero no es posible evaluar f en $(2, 1)$, este punto no pertenece al dominio de f .

A continuación mencionamos algunas funciones típicas de dos variables:

■ **Ejemplo 3.1.1** La *función nula* $f(x, y) = 0$ está definida para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; su imagen es el conjunto $\{0\}$. ■

■ **Ejemplo 3.1.2** La *función constante* $f(x, y) = c$ (siendo c una constante real fija) tiene dominio \mathbb{R}^2 e imagen $\{c\}$. ■

■ **Ejemplo 3.1.3** Una regla de la forma $f(x, y) = a + b_1x + b_2y$ (con a, b_1 y b_2 constantes) se denomina *función lineal*. Así como las funciones lineales de una variable (de la forma general $F(x) = a + bx$) son importantes en el cálculo de una variable, veremos que las funciones lineales de dos variables desempeñan un papel central en el cálculo de dos variables. ■

Otros tipos de funciones incluyen las *funciones polinomiales* de dos variables (como, por ejemplo, las *funciones cuadráticas* cuya forma general es $f(x, y) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + b_1x + b_2y + c$); *funciones racionales*, que son cocientes de polinomios en x e y ; *funciones trigonométricas*; *funciones logarítmicas* y *exponenciales*, etc. Dé ejemplos para cada tipo.

■ **Ejemplo 3.1.4** Describir el dominio y la imagen de $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$. Si es posible, evaluar f en $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 0)$.

Observamos que la expresión racional $\frac{x}{x^2 + y^2}$ está bien definida siempre que el denominador $x^2 + y^2$ sea distinto de cero, lo que implica que x e y no pueden ser simultáneamente cero. Por lo tanto, el dominio natural es el conjunto $\text{Dom}(f) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

La imagen de f está formada por los valores $z = \frac{x}{x^2 + y^2}$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. Observamos que z puede adoptar cualquier valor real, por lo cual $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Como $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$ pertenecen al dominio de f , podemos evaluar f en estos puntos:

$$f(-\frac{1}{2}, 0) = \frac{-\frac{1}{2}}{(-\frac{1}{2})^2 + 0^2} = -2, \quad f(1, 0) = \frac{1}{1^2 + 0^2} = 1, \quad f(1, 1) = \frac{1}{1^2 + 1^2} = \frac{1}{2}.$$

Pero no se puede evaluar f en $(0, 0)$ [en la Sección 3.2 estudiaremos cómo se comporta f cerca de $(0, 0)$]. ■

- **Ejemplo 3.1.5** La función de dos variables $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$, su dominio natural es el conjunto de todos los pares (x, y) de \mathbb{R}^2 para los cuales la expresión $\sqrt{y - x^2}$ es un número real bien definido, luego el radicando $y - x^2$ no puede ser negativo, con lo cual $\text{Dom}(f) = \{(x, y) : y \geq x^2\}$. En el plano coordenado xy , dicho conjunto corresponde a los puntos de la parábola $y = x^2$ y todos los puntos por encima de ésta. Por otro lado, a partir de la expresión de f podemos deducir que esta función no toma nunca valores negativos, pero sí cero o cualquier valor positivo, o sea $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$. ■

Representaciones gráficas

Gráfica de una función de 2 variables: representación en el espacio

Una forma de visualizar el comportamiento de una función de dos variables $f(x, y)$ es mediante la representación de su gráfica.

Definición Se llama *gráfica* de una función f de dos variables al conjunto de todos aquellos puntos del espacio con coordenadas (x, y, z) tales que (x, y) está en el dominio de f , y $z = f(x, y)$. La gráfica de una función de dos variables se representa como una superficie en el espacio. Escribimos:

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y, z) : (x, y) \in \text{Dom}(f), z = f(x, y)\} = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \text{Dom}(f)\}$$

Para una función $F(x)$ de una variable, recordemos que su gráfica es una curva en el plano, con ecuación $y = F(x)$; la gráfica de una función $f(x, y)$ de dos variables es una superficie en el espacio, con ecuación $z = f(x, y)$.

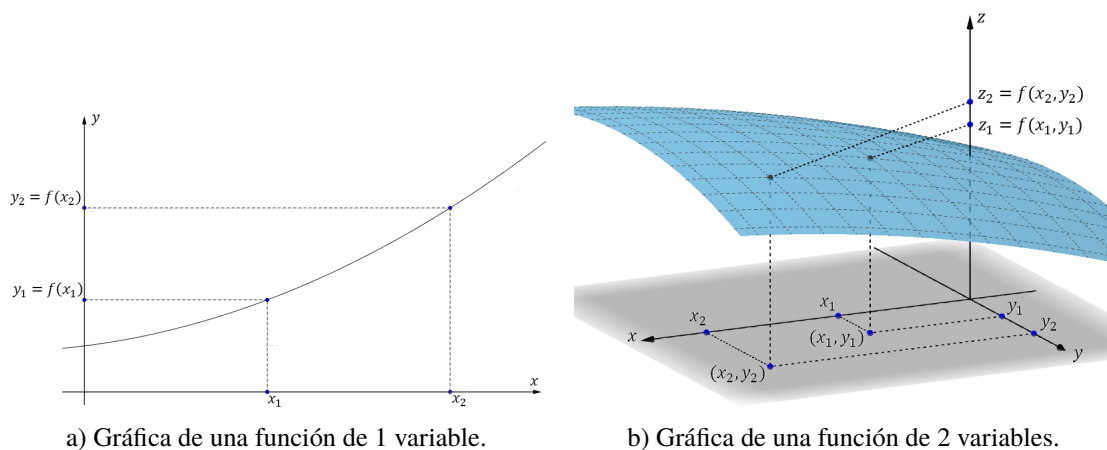


Figura 3.1.1: Comparación de gráficas para funciones de una y de dos variables.



Utilizar el siguiente recurso para visualizar la gráfica de funciones de dos variables en el espacio.

<https://ggbm.at/UJECdp5d>

- **Ejemplo 3.1.6** La función nula $f(x, y) = 0$ tiene como gráfica el plano coordenado xy , cuya ecuación es $z = 0$. ■

- **Ejemplo 3.1.7** La *función constante* $f(x, y) = c$ se representa gráficamente como el plano (horizontal) de ecuación $z = c$. ■

- **Ejemplo 3.1.8** Realizar la gráfica de la función lineal $f(x, y) = x - y + 2$.

Como no hay ninguna condición particular para el dominio de f , consideraremos el dominio natural. Para determinarlo, observamos que la expresión $x - y + 2$ es un número real bien definido para cualesquiera valores reales que adopten las variables x e y , por lo que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$.

Para obtener la imagen de la función observamos que los valores que toma f son $z = x - y + 2$, con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vemos así que z puede adoptar cualquier valor real, por lo que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$. Para trazar la gráfica de f , escribimos $z = f(x, y)$ o sea

$$z = x - y + 2, \quad \text{con } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

que corresponde a la ecuación de un plano. Sabemos del Capítulo 1 que un vector normal al plano $-x + y + z - 2 = 0$ está dado por $\vec{n} = -\check{i} + \check{j} + \check{k}$; además un punto contenido en el plano es $P_0(0, 0, 2)$, pues $f(0, 0) = 2$. Veamos cuáles son las intersecciones de este plano con los tres planos coordenados: con el plano xy ($z = 0$) es la recta $y = x + 2$, con el plano yz ($x = 0$) es la recta $z = -y + 2$, y con el plano xz ($y = 0$) es $z = x + 2$. Con esta información podemos esbozar la gráfica de f como se ve en la Figura 3.1.2.

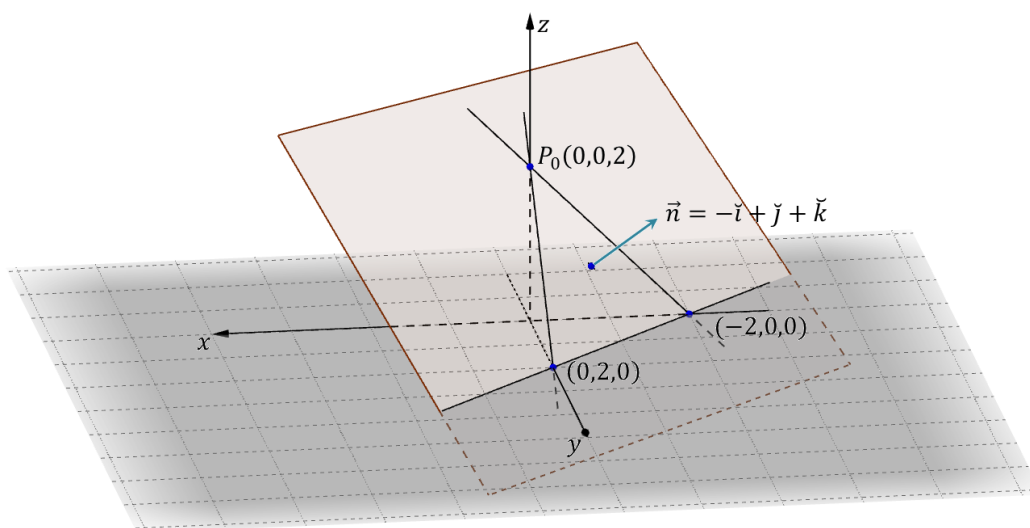


Figura 3.1.2: La gráfica de la función lineal $f(x, y) = x - y + 2$ es el plano $z = x - y + 2$. ■

La función del Ejemplo 3.1.8 es un caso particular de función lineal. La gráfica de la función $f(x, y) = a_1x + a_2y + b$ tiene ecuación $z = a_1x + a_2y + b$, que representa un plano con vector normal $\vec{n} = -a_1\check{i} - a_2\check{j} + \check{k}$ y que contiene a $P_0(0, 0, b)$, pues $f(0, 0) = b$. Recordemos que para una función lineal de una variable, $F(x) = ax + b$, su gráfica en el plano es la recta de ecuación $y = ax + b$, con pendiente a y ordenada al origen b ; esto es, con vector director $\vec{v} = (1, a)$ y que pasa por el punto $p_0(0, b)$, pues $F(0) = b$. Nos preguntamos: ¿todo plano es gráfica de una función lineal de dos variables?

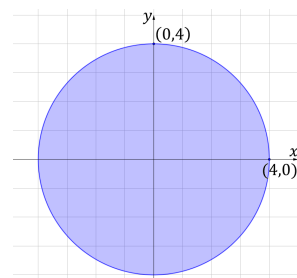
- **Ejemplo 3.1.9** Describir el dominio y la imagen de la función $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. Señalar el dominio de f como una región en el plano xy , y representar la gráfica de f como una superficie en el espacio.

El dominio natural de f es

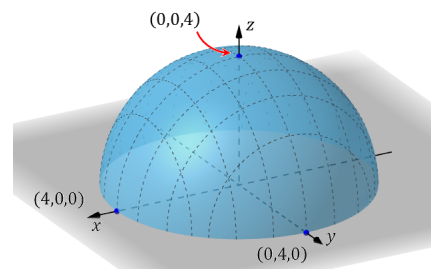
$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) : 16 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 16\}$$

que corresponde al círculo con centro en el origen y radio 4, en el plano xy , como se ilustra en la Figura 3.1.3 a); para puntos fuera de ese círculo, la función no está definida.

La imagen de f es el conjunto de todos los valores que toma la función, en este caso entre 0 [cuando (x, y) pertenece a la circunferencia frontera del dominio] y 4 [cuando $(x, y) = (0, 0)$, únicamente].



a) Dominio de f .



b) Superficie gráfica de f .

Figura 3.1.3: Dominio y gráfica de la función $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

La gráfica de f es la superficie formada por los puntos (x, y, z) del espacio tales que

$$z = +\sqrt{16 - x^2 - y^2}, \quad \text{con } (x, y) \in \text{Dom}(f).$$

Para reconocer cuál es esta superficie, podemos elevar al cuadrado ambos miembros de la igualdad, $z^2 = 16 - x^2 - y^2$, teniendo en cuenta que $z \geq 0$, luego $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, siendo $z \geq 0$.

Identificamos entonces que la gráfica de la función $f(x, y)$ es una superficie cuádrica: la mitad superior de la superficie esférica con centro en el origen y radio 4, como se muestra en la Figura 3.1.3 b). Observe que sólo hay gráfica por encima del círculo de la Figura 3.1.3 a). ■

En relación al Ejemplo 3.1.9, ¿cuál es la función de dos variables cuya gráfica es la mitad inferior de la superficie esférica? La superficie completa de una esfera, ¿puede ser la gráfica de una función de dos variables? ¿Por qué? Reflexione y explique cuáles de las superficies cuádricas vistas en el Capítulo 1 pueden ser la gráfica de una función de dos variables; dé un criterio gráfico general para que una superficie en el espacio sea gráfica de una función de dos variables (recuerde el “criterio de la recta vertical” en Análisis Matemático I).

- **Ejemplo 3.1.10** Trazar la gráfica de la función cuadrática $f(x, y) = x^2 + 16y^2$.

Se tiene $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$ e $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$. La gráfica de f es la superficie $z = f(x, y)$, o sea

$$z = x^2 + 16y^2, \quad \text{con } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Para poder esbozar la superficie gráfica consideramos sus trazas horizontales y verticales.

Las trazas horizontales se obtienen haciendo $z = k$ en la ecuación de la superficie, tomando distintos $k \in \text{Im}(f)$ (¿por qué este rango para k ?):

$$z = x^2 + 16y^2, \quad z = k \quad \Rightarrow \quad x^2 + 16y^2 = k, \quad z = k.$$

Luego, i) si $k = 0$ da solamente el punto $(0, 0)$ del dominio, ii) si $k > 0$ da una elipse de semiejes \sqrt{k} y $\frac{\sqrt{k}}{4}$ en el plano $z = k$.

Las trazas verticales $x = a$ (tomando distintos $a \in \mathbb{R}$) se obtienen reemplazando x por a en la ecuación de la superficie: para cada a , las ecuaciones $z = a^2 + 16y^2, x = a$ representan una parábola en el plano $x = a$. De manera similar las trazas verticales $y = b$ dan: para cada b , la parábola $z = x^2 + 16b^2$ en el plano $y = b$. A partir de esta información podemos reconocer que la superficie gráfica de f es un paraboloides elíptico de eje z .

■

■ **Ejemplo 3.1.11** Trazar la gráfica de $f(x, y) = y^2$.

Observamos que esta función está bien definida para cualquier valor real que adopten las variables independientes (cualquier y , de hecho), por lo que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$. Vemos también que f toma sólo valores mayores o iguales a 0, por lo que $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$.

La gráfica de f tiene ecuación $z = y^2$ que, como sabemos, corresponde a un cilindro parabólico de eje x (ver Sección 1.7 del Capítulo 1). Para ayudarnos a dibujar notamos que la traza vertical $x = a$ determina la parábola $z = y^2$ en el plano $x = a$, como se puede ver en la Figura 3.1.4. ¿Cómo son las trazas verticales $y = b$? ¿Y las horizontales $z = k$? Márquelas en la figura.

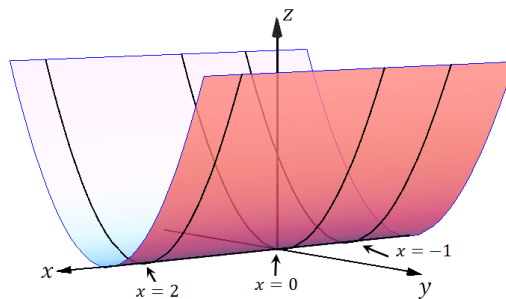


Figura 3.1.4: La gráfica de $f(x, y) = y^2$ es la superficie dada por el cilindro parabólico $z = y^2$.

■

■ **Ejemplo 3.1.12** Estudiar la gráfica de la función trigonométrica $f(x, y) = \sin x$ para $x \in [0, 4\pi]$, $y \in [0, 5]$.

El dominio natural de $f(x, y) = \sin x$ es todo \mathbb{R}^2 pero aquí el dominio está expresamente acotado; entonces $\text{Dom}(f) = [0, 4\pi] \times [0, 5]$. Justifique que $\text{Im}(f) = [-1, 1]$.

La gráfica de esta función es la superficie de ecuación $z = \sin x$, que es un tipo de superficie de las denominadas cilíndricas (ver Sección 1.7.2 del Capítulo 1). Dibuje esta superficie, ayudándose en la forma de las trazas verticales $y = \text{constante}$. Tiene la forma de una chapa acanalada, de dimensiones 4π por 5 de base. Visualice usando Geogebra.

■

Curvas de nivel: representación en el dominio de la función

Una manera alternativa de visualizar una función (no constante) de dos variables $f(x, y)$ puede obtenerse indicando en distintos puntos del dominio cuánto vale la función y “conectando” los puntos (x, y) que dan el mismo valor de f . Realizando este procedimiento para distintos valores de f , se obtiene un conjunto de curvas en el mismo plano en el que está definida la función: cada una de las curvas se genera uniendo puntos del dominio donde la función toma el mismo valor, se dice que sobre esa curva la función “tiene el mismo nivel”.

Definición — Curva de nivel. Se llama *curva de nivel* k de una función f de dos variables al conjunto de todos los puntos del dominio de f con coordenadas (x, y) tales que $f(x, y) = k$, siendo k una constante que pertenece a la imagen de f . Llamando C_k a la curva de nivel k , entonces

$$C_k = \{(x, y) : (x, y) \in \text{Dom}(f), f(x, y) = k\} \quad \text{para cada } k \in \text{Im}(f).$$

La manera de representar a la función es mediante su *mapa de niveles* o *mapa de contornos*, que se obtiene dibujando unas cuantas curvas de nivel, para distintos valores de k . Es común tomar valores de k equiespaciados.



El siguiente recurso permite identificar curvas de nivel de una función de dos variables:
<https://ggbm.at/Us7Y66Dx>

■ **Ejemplo 3.1.13** Trazar varias curvas de nivel para las funciones de los siguientes ejemplos:

a) Ejemplo 3.1.8, b) Ejemplo 3.1.9, c) Ejemplo 3.1.11. En cada caso, a partir de las curvas de nivel, extraer conclusiones sobre el comportamiento de las correspondientes funciones.

a) $f(x, y) = x - y + 2$:

Vimos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$, luego el mapa de contornos cubre todo el plano xy ; y vimos que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, por lo tanto consideramos las curvas de nivel correspondientes a cualquier número real k .

La curva de nivel k , que se obtiene haciendo $f(x, y) = k$, en este caso queda

$$x - y + 2 = k$$

o sea $y = x + 2 - k$, que es una recta (en \mathbb{R}^2) de pendiente 1 y ordenada al origen $2 - k$. Se muestran en la Figura 3.1.5 a) algunas curvas de nivel para distintos valores de k ; notamos que cuando k aumenta en una unidad (lo que significa que la función f aumenta en uno, o sea que la altura de su gráfica aumenta una unidad), la curva de nivel está desplazada hacia abajo en una unidad. Las curvas de nivel para distintos valores de k equiespaciados (por ejemplo, $k = -2, 0, 2, \dots$) dan rectas paralelas entre sí, igualmente espaciadas. Se deduce que la superficie gráfica tendrá siempre la misma pendiente; de hecho vimos que la gráfica es una superficie plana; ver Figura 3.1.2.

b) $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$:

Su dominio es $\text{Dom}(f) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 16\}$ (ver Figura 3.1.3, y vimos que $\text{Im}(f) = [0, 4]$, luego los valores de k para las curvas de nivel k deben ser números reales entre 0 y 4; consideramos, por ejemplo, las curvas de nivel $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Para obtener la curva de nivel k hacemos

$$\sqrt{16 - x^2 - y^2} = k.$$

Elevando al cuadrado y despejando queda $x^2 + y^2 = 16 - k^2$, que reconocemos como la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt{16 - k^2}$ (aquí notamos que el radio queda bien definido ya que, como sabemos, $k \in [0, 4]$).

Si tomamos $k = 0$, la curva de nivel es la circunferencia de radio 4; para $k = 1$, será la circunferencia de radio $\sqrt{15}$, etc. Vemos en la Figura 3.1.5 b) que el mapa de contornos consiste en una sucesión de circunferencias concéntricas, centradas en $(0, 0)$ y de radio decreciente a medida que k aumenta: las circunferencias van desde C_0 dada por $x^2 + y^2 = 16$ para $k = 0$ achicándose hasta “degenerar en un punto”, el origen, ya que para $k = 4$ la curva C_4 dada por $x^2 + y^2 = 0$ corresponde al punto $(0, 0)$.

Observamos también que el mapa de contornos en este ejemplo (a diferencia del ejemplo anterior) ocupa solamente el círculo de radio 4, lo que se corresponde por supuesto con el dominio de la función.

c) $f(x, y) = y^2$:

Su dominio es \mathbb{R}^2 y su imagen son los números reales mayores o iguales a 0. Luego consideramos $k \geq 0$. La curva de nivel k está dada por $y^2 = k$ en \mathbb{R}^2 , lo que implica $|y| = \sqrt{k}$, esto es $y = \pm\sqrt{k}$.

Las curvas de nivel son, para cada k , un par de rectas paralelas al eje x . Observamos en la Figura 3.1.5 c) que para valores pequeños del nivel k las curvas están separadas, y se van juntando a medida que k crece. Esto significa que la gráfica tiene siempre la misma altura a lo largo de rectas paralelas al eje x ; además, que la superficie es cada vez más empinada a medida que crece en altura. Estas consideraciones son coherentes con la gráfica del cilindro parabólico en \mathbb{R}^3 (Figura 3.1.4).

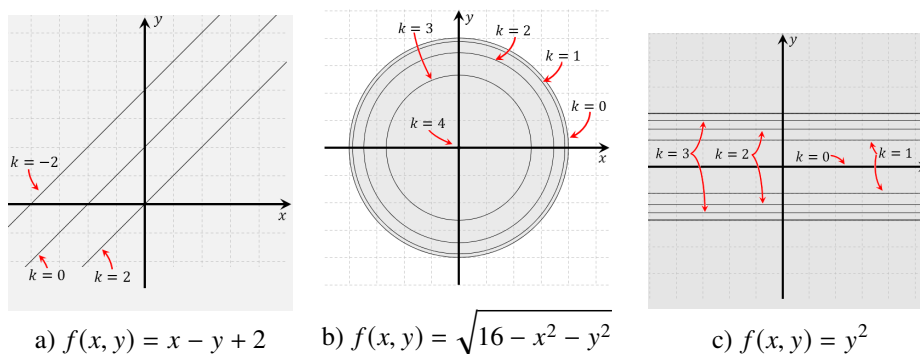


Figura 3.1.5: Curvas de nivel para funciones de dos variables.



Conexión entre gráfica y mapa de curvas de nivel

Por construcción, para los pares (x, y) del dominio que forman una dada curva de nivel, la función f toma el mismo valor. Luego, la curva de nivel k muestra todos los pares del dominio donde la gráfica de f tiene nivel o “altura” k . A partir de las curvas de nivel rotuladas con su nivel o altura de función, se puede inferir la gráfica de la función, elevando mentalmente cada curva de nivel hasta la altura apropiada. Si se hiciera este procedimiento para todas las curvas de nivel C_k con $k \in \text{Im}(f)$, juntas conformarían la gráfica de f .

Tracemos las curvas de nivel 0, 16 y 64 de la función $f(x, y) = x^2 + 16y^2$ del Ejemplo 3.1.10, cuya gráfica vimos que es un paraboloides elíptico.

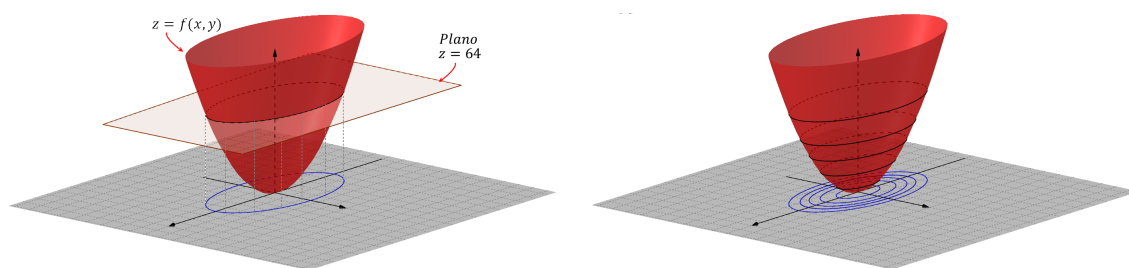


Figura 3.1.6: Dos representaciones equivalentes de la función $f(x, y) = x^2 + 16y^2$: mediante la gráfica espacial (un paraboloides elíptico) y mediante curvas de nivel planas (elipses).

La curva de nivel 0 está formada por los puntos del plano xy donde

$$f(x, y) = x^2 + 16y^2 = 0 \quad \text{o sea} \quad (x, y) = (0, 0)$$

es decir que $C_0 = \{(0, 0)\}$. La curva de nivel 16 es el conjunto de puntos del plano xy donde

$$f(x, y) = x^2 + 16y^2 = 16 \quad \text{o sea} \quad \frac{x^2}{4^2} + y^2 = 1$$

es decir que $C_{16} = \{(x, y) : \frac{x^2}{4^2} + y^2 = 1\}$, la representación gráfica de C_{16} en el plano xy es la elipse con semiejes 4 y 1. Los puntos que pertenecen a la curva de nivel 64 cumplen

$$f(x, y) = x^2 + 16y^2 = 64 \quad \text{o sea} \quad \frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

es decir que $C_{64} = \{(x, y) : \frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1\}$, la representación gráfica de C_{64} en el plano xy es la elipse con semiejes 8 y 2. Ver Figura 3.1.6.

Veamos ahora cuál es la relación entre las curvas de nivel de f y las trazas horizontales de su gráfica. La Figura 3.1.6 muestra la traza horizontal $z = 64$ de la gráfica de f que es la superficie dada por $z = x^2 + 16y^2$. Notamos que esta traza está directamente arriba de la elipse $\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$, que es la curva de nivel 64 de f , en el dominio de la función. Dicho de otra forma, la curva de nivel $f(x, y) = 64$ es la traza de la superficie gráfica para $z = 64$ proyectada en el plano xy .

El ejemplo que acabamos de analizar ilustra un resultado que es general:

La curva de nivel k de una función $f(x, y)$ es precisamente la proyección en el plano xy de la traza horizontal $z = k$ de la superficie que es gráfica de f . Ver Figura 3.1.7.

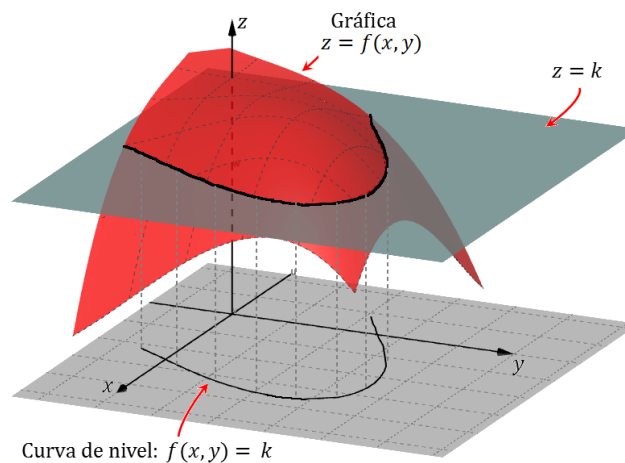


Figura 3.1.7: Relación entre la curva de nivel k y la traza horizontal $z = k$ de la gráfica de f

Dicho de otra forma, si se dibujan curvas de nivel de una función y se visualizan como si se elevaran hasta el nivel que indica k , es posible trazar mentalmente una gráfica aproximada. Por ejemplo: la superficie será empinada donde las curvas de nivel se aproximan mucho y será más plana donde están más separadas. Analicemos el Ejemplo 3.1.13b).

Conociendo las curvas de nivel dadas por $x^2 + y^2 = 16 - k^2$ para varios k , podemos imaginarnos la gráfica de la función dada por $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ si “subimos” cada curva hasta la altura $z = k$ correspondiente. Así notamos que, partiendo de $k = 0$ la gráfica será más “empinada” al principio y se irá “aplanando” a medida que avanzamos en altura, lo que concuerda con la gráfica de la superficie esférica. Ver Figuras 3.1.3 b) y 3.1.5 b).

¿Qué ejemplos conocemos de curvas de nivel?

En los *mapas topográficos*, por ejemplo, se trazan curvas de nivel de regiones montañosas. En este caso las curvas de nivel unen puntos de la región que tienen la misma altura respecto del nivel del mar.

Otro ejemplo son las *isotermas* correspondientes a una región. Si pensamos en un mapa meteorológico que indique por ejemplo las temperaturas promedio del mes de enero, las isotermas son curvas imaginarias en un planisferio que van conectando los lugares del mundo que tienen la misma temperatura promedio en ese mes. Del mismo modo, las *isobaras* conectan sitios de igual presión. ¿Qué otros ejemplos conoce? Es común en este tipo de mapas, utilizar una escala de colores; interprete qué representa.

Evaluación de una función de 2 variables a lo largo de una curva

Resaltamos el siguiente resultado: si evaluamos la función $f(x, y)$ en los puntos de una curva de nivel, la función toma un mismo valor: el valor del nivel correspondiente. Como vimos en el Capítulo 2, podemos describir la curva dada por $C_k = \{(x, y) \in \text{Dom}(f) : f(x, y) = k\}$ por medio de una función vectorial de un parámetro como $\vec{r}_k(t) = (x_k(t), y_k(t)), t \in I \subset \mathbb{R}$. Dicho de otro modo, si evaluamos la función en cualquier punto de la curva de nivel, da el valor del nivel: $f(x_k(t), y_k(t)) = k$, para todo $t \in I$.

Por ejemplo, la evaluación de $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ en los puntos de la curva dada por $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ da $f(x = \cos t, y = \sin t) = \sqrt{16 - \cos^2 t - \sin^2 t} = \sqrt{15} = \text{constante}$. Luego la curva dada es la curva de nivel $k = \sqrt{15}$ de f .

Por último, podemos preguntarnos cuánto vale una función si la evaluamos en los puntos de una curva *arbitraria* contenida en el dominio de la función, aunque no sea necesariamente una curva de nivel: Si $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in I$ es una parametrización de una dada curva $C \subset \text{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^2$, los valores que toma $f(x, y)$ para puntos de la curva C se obtienen como $f(x(t), y(t))$ o, usando notación vectorial, $f(\vec{r}(t))$. Por ejemplo, la evaluación de $f(x, y) = y^2$ en el segmento que va de $A(2, -1)$ a $B(2, 1)$, parametrizado por $\vec{r}(t) = (2, t)$ con $t \in [-1, 1]$, da $f(\vec{r}(t)) = f(x = 2, y = t) = t^2$. ¿Cuánto da la evaluación de f en los demás bordes del rectángulo $[-1, 2] \times [-1, 2]$? ¿Alguno de los bordes es una curva de nivel? Observe las Figuras 3.1.4 y 3.1.5 c).

3.1.2 Funciones escalares de tres variables

Definición Una *función real* f de tres variables es una regla que asigna a cada terna ordenada de números reales (x, y, z) , un único número real $f(x, y, z)$.

El *dominio* de f es el subconjunto de \mathbb{R}^3 en el cual está definida la función; es decir que el dominio de una función de tres variables se representa como una región sólida del espacio. El *dominio natural* de una función f de tres variables es el conjunto de todos aquellos puntos del espacio para los cuales $f(x, y, z)$ es un número real bien definido.

La *imagen* de f es el subconjunto de \mathbb{R} formado por los valores que toma la función f . Escribimos:

$$f : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Para $(x, y, z) \in E = \text{Dom}(f)$ se puede escribir $w = f(x, y, z)$, donde queda explícitamente definido que w es el valor que toma f en la terna ordenada (x, y, z) . Las variables x, y, z son llamadas *variables independientes*, y w es la *variable dependiente*.

Por ejemplo, dada $f(x, y, z) = 4x + e^{yz} \ln(x^2 + z^2)$, el resultado de evaluar f en $(1, 1, 0)$ es $f(1, 1, 0) = 4$, y f en $(0, -1, 1)$ vale $f(0, -1, 1) = 0$; no es posible evaluar f en $(0, 2, 0)$, este punto no pertenece al dominio de f .

¿Cómo se expresan la función nula, una función constante y una función lineal de tres variables? Dé otros ejemplos, y analice dominio e imagen.

Representación gráfica

El concepto de gráfica para una función de tres variables no es útil, pues como vivimos en un mundo tridimensional nos resulta difícil imaginar conjuntos en \mathbb{R}^4 . Como alternativa, apelamos a una representación espacial que lleva a introducir la idea de *superficie de nivel* para una función de tres variables, extendiendo el concepto de curva de nivel visto para funciones de dos variables.

Superficies de nivel: representación en el dominio de la función

Definición Se llama *superficie de nivel k* de una función f de tres variables al conjunto de todos los puntos del dominio de f con coordenadas (x, y, z) tales que $f(x, y, z) = k$, siendo k una constante que pertenece a la imagen de f . Llamando S_k a la superficie de nivel k , entonces

$$S_k = \{(x, y, z) : (x, y, z) \in \text{Dom}(f), f(x, y, z) = k\}$$

para cada $k \in \text{Im}(f)$.

Podemos interesarnos en los valores que toma una función de tres variables en los puntos de una superficie *arbitraria* contenida en el dominio de la función, aunque no sea necesariamente una superficie de nivel de la función. Dejamos esto pendiente para más adelante, después de que veamos cómo parametrizar superficies en el espacio.

El valor de una función $f(x, y, z)$ en cualquier punto de una superficie de nivel S_k , es igual a k .

Supongamos que $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, cuyo dominio es todo \mathbb{R}^3 . Una superficie de nivel es un subconjunto de \mathbb{R}^3 en donde f es constante. Por ejemplo, la superficie de nivel 1 para f es el conjunto donde $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. A éste sí lo podemos visualizar: es la superficie esférica con centro en el origen y radio 1 en \mathbb{R}^3 . Si buscamos todos los puntos para los cuales f vale 4, notamos que corresponde a la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Entender las superficies de nivel ayuda a entender, en parte, la función en cuestión.

■ **Ejemplo 3.1.14** Describir las superficies de nivel de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Dado que $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$, consideramos superficies de nivel con $k \geq 0$. Para ello hacemos $f(x, y, z) = k$; reemplazando la función queda una superficie S_k dada por $x^2 + y^2 + z^2 = k$, que reconocemos fácilmente: si $k = 0$ como el punto $(0, 0, 0)$, ó si $k > 0$ como la ecuación de la superficie esférica con centro en el origen de coordenadas y radio \sqrt{k} .
¿Ahora puede hacerse una idea gráfica de f ?



Con el siguiente recurso puede visualizarse las superficies de nivel asociadas a la función de 3 variables $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$:

<https://ggbm.at/JktUn6h7>

Evaluación de una función de 3 variables a lo largo de una curva o sobre una superficie

Podemos preguntarnos cuánto vale una función si la evaluamos en los puntos de una curva arbitraria contenida en el dominio de la función (por ejemplo, se quiere evaluar el potencial eléctrico V que sufre una carga eléctrica cuando se mueve a lo largo de cierta trayectoria en el espacio): Si $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ con $t \in I$, es una parametrización de una dada curva $C \subset \text{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^3$, los valores que toma $f(x, y, z)$ para puntos de la curva C se obtienen como $f(x(t), y(t), z(t))$ o, usando notación vectorial, $f(\vec{r}(t))$.



Mencionamos, por último, que en algunas aplicaciones será conveniente identificar una superficie que es gráfica de una función de dos variables, con una superficie de nivel de una función de tres variables. Esto se logra por ejemplo de la siguiente manera:

Dada $f(x, y)$, su gráfica es la superficie S de ecuación $z = f(x, y)$. Podemos definir una nueva

función de 3 variables

$$F(x, y, z) = z - f(x, y)$$

donde ahora z entra como variable independiente de F . La *superficie de nivel cero* de F satisface la ecuación $F(x, y, z) = 0$, que coincide con la ecuación de S (observar que si queremos estudiar f y su gráfica S , no nos interesan otras superficies de nivel de F más que la de nivel $k = 0$).

Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + 16y^2$ es el paraboloides elíptico $z = x^2 + 16y^2$, que coincide con la superficie de nivel 0 de la función $F(x, y, z) = z - x^2 - 16y^2$, dada por $z - x^2 - 16y^2 = 0$.

3.1.3 Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes funciones, estudie su gráfica. Intente dibujarla y también “fabricarla” con ayuda de papel grueso, cartón o un objeto con la forma apropiada.

$$\begin{array}{lll} a) f(x, y) = x & b) f(x, y) = |x| & c) f(x, y) = 1 - x^2 \\ d) f(x, y) = \sin y & e) f(x, y) = \frac{1}{y^2} & f) f(x, y) = y^3 \end{array}$$

¿Qué puede concluir respecto de la gráfica de una función $f(x, y)$ que depende explícitamente de una sola de sus variables: $f(x, y) = X(x)$ ó $f(x, y) = Y(y)$?

2. Considere una función f cuya gráfica es “medio” cono de eje z , y una función g cuya gráfica es un paraboloides circular también de eje z ; ambas superficies tienen vértice en el origen y abren hacia arriba. Proponga expresiones para f y g . Elija varios niveles o alturas en ambas gráficas, y proyecte en el plano xy para formar curvas de nivel para f y para g .

3. Determine dominio e imagen de las siguientes funciones, y describa la forma de las curvas de nivel:

$$\begin{array}{ll} a) f(x, y) = x - y & b) g(x, y) = 4x^2 + 9y^2 \\ c) h(x, y) = \ln(x + y - 1) & d) f(x, y) = x^2 - y^2 \\ e) g(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} & f) h(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2) \end{array}$$

4. Una placa metálica delgada está ubicada en el plano xy , ocupando una región plana D . La temperatura en el punto de la placa con posición (x, y) es $T(x, y)$. Las curvas de nivel de la función T son *isotermas*, pues en todos los puntos de una isoterma la temperatura es la misma. Trace algunas isotermas si la función que indica la temperatura (en grados Celsius) está dada por $T(x, y) = \frac{100}{1 + x^2 + 2y^2}$, $(x, y) \in D$. ¿Dónde está más caliente la placa?

5. Si $V(x, y)$ es el potencial eléctrico en un punto (x, y) del plano xy , entonces las curvas de nivel de la función V se llaman *curvas equipotenciales*, pues en todos los puntos de una curva equipotencial el potencial eléctrico es el mismo. Trace algunas curvas equipotenciales

$$\text{si } V(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

6. En grupos, consulten en el sitio web del Servicio Meteorológico Nacional cuáles son los mapas de contorno que se publican. Elijan uno y analízenlo en términos de una función de dos variables. Intercambien el análisis con otro grupo.

7. Describa, utilizando coordenadas polares, las curvas de nivel de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

8. Determine dominio e imagen, y describa las superficies de nivel de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll} a) f(x, y, z) = \ln(x - y + z) & b) g(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2 \\ c) h(x, y, z) = x^2 - y^2 & \end{array}$$

9. ¿Cómo debe ser la expresión de una función de tres variables, para que sus superficies de nivel sean elipsoides concéntricos en \mathbb{R}^3 , centrados en $(0, 0, 0)$, de tal forma que el tamaño de los elipsoides: a) aumenta con el nivel; b) disminuye con el nivel?

3.2 Límite y continuidad

El concepto de límite es una herramienta básica y útil para el análisis de funciones; nos permite estudiar derivadas y por lo tanto máximos y mínimos de funciones.

Pensemos primero en una función $F(x)$ de una variable, $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, y recordemos lo visto en el curso de Análisis Matemático I. ¿Qué quiere decir que el límite de F cuando x tiende (se acerca) a x_0 , es igual a L ? Intuitivamente esto significa que a medida que x se acerca más y más al número x_0 , los valores que va tomando F se acercan más y más al valor L . Formalmente se expresa así:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = L$$

si para cada número $\epsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$, tal que si $x \in \text{Dom}(F)$, entonces

$$0 < |x - x_0| \leq \delta \quad \text{implica} \quad |F(x) - L| < \epsilon.$$

Ahora bien, nos preguntamos ¿cómo se acerca x al número x_0 ? Al ser F una función de una variable (el dominio está incluido en la recta real, es unidimensional), sólo hay dos direcciones o caminos posibles para llegar al número x_0 : desde la izquierda o desde la derecha de x_0 . Si el límite por la izquierda, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x)$, es distinto del límite por la derecha, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x)$, entonces el límite de la función cuando x se acerca a x_0 no existe; mientras que si ambos límites laterales existen y coinciden, entonces la función tiene ese límite.



En el siguiente recurso pueden explorar la relación entre ϵ y δ en la definición de límite para funciones de una variable: <https://ggbm.at/zfmrwsq9>

Para funciones de varias variables, aunque el concepto de límite es similar al visto para una variable, el cálculo es un poco más elaborado.

Límite de una función de dos variables

Pensemos ahora en una función real $f(x, y)$ de dos variables, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que la función de dos variables $f(x, y)$ tiene límite L (número real fijo) cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0) , si para todos los puntos de coordenadas (x, y) suficientemente cercanos al punto (x_0, y_0) , los valores $f(x, y)$ son arbitrariamente próximos al número L . Notamos que la definición es similar a la del límite para una variable. Sin embargo, si tenemos en cuenta que f es una función de dos variables (definida sobre un dominio bidimensional), entonces el punto (x, y) podrá acercarse al punto (x_0, y_0) desde muchas direcciones. De hecho, hay infinitas maneras de acercarse a un punto en el plano. La dirección del acercamiento es muy importante, como veremos a continuación.

Definición Se dice que una función $f(x, y)$ tiene *límite* L cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0) , que se escribe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L,$$

si para cada número $\epsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$, tal que si $(x, y) \in \text{Dom}(f)$, entonces

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq \delta \quad \text{implica} \quad |f(x, y) - L| < \epsilon.$$

La diferencia $|f(x, y) - L|$ es la distancia entre los números $f(x, y)$ y L ; mientras que $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ es la distancia entre el punto (x, y) en el dominio de la función y el punto (x_0, y_0) . La definición de límite dice, entonces, que la distancia entre $f(x, y)$ y L es arbitrariamente pequeña siempre que la distancia entre (x, y) y (x_0, y_0) sea suficientemente pequeña. El punto (x_0, y_0) puede no pertenecer al $\text{Dom}(f)$; el único requisito es que los (x, y) varíen en el $\text{Dom}(f)$. [Recordar, por ejemplo, que la función $F(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ no contiene a $x_0 = 0$ en su dominio pero sin embargo F tiene límite cuando $x \rightarrow 0$; ¿cuánto vale este límite?]



En el siguiente recurso se puede explorar la relación entre ϵ y δ para funciones de 2 variables: <https://ggbm.at/j436nsBm>

Como vemos, la definición se refiere sólo a la distancia entre (x, y) y (x_0, y_0) , y no dice nada sobre la dirección de acercamiento. Por lo tanto, si existe el límite, $f(x, y)$ debe acercarse al mismo número L independientemente de cómo (x, y) se acerque a (x_0, y_0) . Obviamente, resulta imposible analizar todos los caminos que llegan a (x_0, y_0) para ver a qué valor tiende f por cada uno de ellos. Tendríamos que construir todas las curvas que pasan por (x_0, y_0) y evaluar f en los puntos de esas curvas.

Ahora bien, si se intenta ver a qué valor tiende f siguiendo dos o tres caminos que lleven a (x_0, y_0) , y resulta que los valores obtenidos son distintos, se tiene un criterio sencillo para determinar que el límite NO existe.

¿Pero si se prueba por varios caminos y se obtiene el mismo valor? ¿Significa que ese valor es el límite? La respuesta es NO: no alcanza con que por algunos caminos dé lo mismo. Y aquí encontramos una complicación porque, como dijimos, no se puede analizar lo que ocurre con f por todos los caminos posibles. Sin embargo, después de obtener el mismo valor L a lo largo de varias trayectorias, se podría *suponer* que el límite existe y que toma el valor L . En este caso, para asegurar que efectivamente $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ es igual a L , se debe satisfacer la definición dada previamente. A menudo esta condición no resulta fácil de comprobar, pero se pueden usar herramientas alternativas que permitan asegurar si el límite existe y que en tal caso vale L . Veremos algunas propiedades útiles y varias técnicas para el cálculo de límites.

Propiedades de los límites de funciones de dos variables

Las reglas de límites para funciones de una variable se extienden a funciones de dos variables. Se tiene el siguiente criterio:

Proposición 3.2.1 — Criterio del “sandwich”. Si existen funciones $g(x, y)$ y $h(x, y)$ tales que

$$g(x, y) \leq f(x, y) \leq h(x, y)$$

para todo $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ en un disco con centro en (x_0, y_0) , y si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} h(x, y) = L,$$

entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

■ **Ejemplo 3.2.1** Calcular $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y^2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right)$.

Considerando que $-1 \leq \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \leq 1$ para todo $x \neq 0$, se cumple la siguiente desigualdad:

$$-y^2 \leq y^2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \leq y^2.$$

Si definimos $g(x, y) = -y^2$ y $h(x, y) = y^2$ tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y) = 0,$$

por lo tanto aplicando el criterio dado resulta

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y^2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) = 0.$$

■

Teorema 3.2.2 Sea $c \in \mathbb{R}$ una constante, y f y g funciones reales de dos variables tales que existen los siguientes límites

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = M.$$

Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y) + g(x,y)] = L + M$
- ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [cf(x,y)] = cL$
- iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y)g(x,y)] = LM$
- iv) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$ si $M \neq 0$

Además, si $M = 0$ y $L \neq 0$, entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ no existe.

Aplicando estas propiedades a funciones polinomiales y racionales, obtenemos el útil resultado de que el límite cuando $(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)$, puede calcularse evaluando directamente la función en (x_0,y_0) . El único requisito a tener en cuenta es que las funciones racionales estén definidas en (x_0,y_0) , esto es, que (x_0,y_0) pertenezca al dominio de la función racional.

■ **Ejemplo 3.2.2** a) Calcular, si existe, el límite de $\frac{5x^2y}{x^2 + y^2}$ cuando $(x,y) \rightarrow (2,-1)$. b) Encontrar

el límite de $\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ cuando $(x,y) \rightarrow (0,0)$ y cuando $(x,y) \rightarrow (1,1)$.

a) Se trata de una función racional que está bien definida en $(2,-1)$. Por lo tanto podemos calcular el límite aplicando la propiedad **iv)** del Teorema 3.2.2, y por evaluación directa de los polinomios del numerador y denominador resulta:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} = \frac{5 \cdot 2^2(-1)}{2^2 + (-1)^2} = -4.$$

b) Como el denominador $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ tiende a 0 cuando $(x,y) \rightarrow (0,0)$ (yendo por caminos en el primer cuadrante), no podemos usar la regla del cociente. El numerador también se anula. Veamos cómo resolver esta indeterminación. Si multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ (que, fuera del origen, es distinto de cero), produciremos una fracción equivalente cuyo límite *si sabemos* calcular:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - xy)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(x-y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x-y} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 0. \end{aligned}$$

Notar que el dominio de la función original $\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ es el conjunto $\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, \text{ con } x \neq y\}$, por lo cual el factor $x - y$ es distinto de cero, luego pudimos simplificarlo. Notar, por otro lado, que el dominio de la función simplificada $x(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ es el conjunto $\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$. Ambas funciones coinciden, salvo sobre la recta $y = x$, donde la primera no está definida. Lo interesante de la noción de límite es precisamente que “en el límite” se aproximan al mismo valor real, en este caso, 0. Resolver el caso $(x, y) \rightarrow (1, 1)$, para lo cual se puede usar un razonamiento similar. ■

- **Ejemplo 3.2.3** Determinar, si existe, el límite cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ para cada una de las siguientes funciones: a) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, b) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, c) $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$.

Notamos que en los tres casos el dominio es $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, y que tanto el polinomio del numerador como el del denominador tienden a 0 al acercarse al origen. Veamos qué pasa con cada función racional en el límite.

- a) Analizaremos qué pasa cuando nos acercamos a $(0, 0)$ por diferentes caminos. Por ejemplo, si nos acercamos al origen por el eje x , o sea yendo por puntos con $y = 0$, la función toma el valor $f(x, 0) = \frac{x^2}{x^2} = 1$ (x no es cero). Si nos aproximamos por el eje y , o sea con $x = 0$, se tiene $f(0, y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1$ (y no es cero). Por lo tanto, encontramos dos trayectorias que llegan al origen, pero tales que a lo largo de cada una de ellas f toma valores diferentes (1 ó -1). Esto es justificación suficiente para afirmar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ NO existe.}$$

- b) Observamos que a lo largo de la recta $x = 0$ (el eje y), la función queda $f(0, y) = \frac{0}{y^2} = 0$ siempre que $y \neq 0$. De manera similar, a lo largo de la recta $y = 0$ (el eje x), la función queda $f(x, 0) = \frac{0}{x^2} = 0$ siempre que $x \neq 0$. Pero si consideramos llegar al origen a lo largo de, por ejemplo, una recta de pendiente m arbitraria, $y = mx$, resulta que

$$f(x, mx) = \frac{x \cdot mx}{x^2 + (mx)^2} = \frac{m x^2}{(1 + m^2)x^2} = \frac{m}{1 + m^2},$$

siempre que $x \neq 0$ (y por lo tanto se tiene $y = mx \neq 0$). O sea que, a lo largo de la recta $y = mx$, con una dada pendiente m , la función tiene el valor fijo $\frac{m}{1 + m^2}$; pero para otra recta con distinta pendiente dará otro valor, ya que $f(x, mx)$ depende de m . Entonces, por distintos caminos toma distintos valores. Por lo tanto $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ NO existe.

- c) Analicemos qué pasa con la función a lo largo de una línea recta que pasa por el origen, dada por $y = mx$, con m arbitraria. Vemos que

$$f(x, mx) = \frac{x (mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2 x}{1 + m^4 x^2},$$

si $x \neq 0$. Esta expresión tiende a 0 cuando $x \rightarrow 0$, para cualquier m (inclusive para $m = 0$ o m infinitamente grande, que corresponden a los casos de acercamiento por los ejes x e y , respectivamente).

Probemos con otro tipo de camino, no recto, por ejemplo $y = \sqrt{x}$ siendo $x > 0$. Luego

$$f(y^2, y) = \frac{y^2 y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2},$$

si $y \neq 0$.

Entonces, por rectas la función tiende a 0, pero por otra curva (media parábola horizontal) vale $\frac{1}{2}$. Este tipo de comportamiento no es fácil de imaginar gráficamente,

pero ocurre en dos dimensiones. Por lo tanto $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ NO existe. ■



En los siguientes recursos se puede visualizar el comportamiento de las funciones del Ejemplo 3.2.3. La elección de distintos caminos hace que $f(x, y)$ tienda a distintos valores.

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

<https://ggbm.at/n3VK7zVP>

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

<https://ggbm.at/fatXWTpa>

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

<https://ggbm.at/t44fV4W3>

■ **Ejemplo 3.2.4** Calcular, si existe, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 + 5xy^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}$.

Fuera del origen, la función puede simplificarse como $3 + \frac{5xy^2}{x^2 + y^2}$. Observamos que a lo largo de la recta $x = 0$, la función siempre tiene el valor 3 cuando $y \neq 0$. De manera similar, a lo largo de la recta $y = 0$ la función siempre tiene el valor 3 cuando $x \neq 0$. Así, si el límite existiese cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, el valor de ese límite debería ser 3. Para comprobar si es así, podemos aplicar una de estas técnicas: a) la definición de límite, o b) el criterio del sandwich.

a) Sea $\epsilon > 0$, queremos encontrar un valor $\delta > 0$ tal que:

$$\text{si } 0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2 + 5xy^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} - 3 \right| < \epsilon.$$

Tenemos

$$\left| \frac{3x^2 + 5xy^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} - 3 \right| = \left| \frac{5xy^2}{x^2 + y^2} \right| = \frac{5|x|y^2}{x^2 + y^2} \leq 5|x| = 5\sqrt{x^2} \leq 5\sqrt{x^2 + y^2} < 5\delta$$

donde se utilizó que $y^2 \leq x^2 + y^2$, y que $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$.

Entonces si elegimos $\delta = \frac{\epsilon}{5}$ resulta

$$\left| \frac{3x^2 + 5xy^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} - 3 \right| < 5\delta = \epsilon.$$

Esto significa que la diferencia entre la función y el valor 3 se puede hacer arbitrariamente pequeña, dentro de un pequeño disco alrededor de $(0, 0)$. O sea que, mediante

la definición, demostramos que efectivamente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 + 5xy^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} = 3$$

tal como sospechamos a partir de dos caminos donde daba el mismo resultado.

b) Para aplicar el criterio del sandwich, buscamos acotar $f(x, y) = \frac{3x^2 + 5xy^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} = 3 + \frac{5xy^2}{x^2 + y^2}$, para $(x, y) \neq (0, 0)$. Como $y^2 \leq x^2 + y^2$, se tiene que $0 \leq \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 1$, y entonces

$$\left| \frac{5xy^2}{x^2 + y^2} \right| = 5|x| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 5|x|$$

de donde

$$-5|x| \leq \frac{5xy^2}{x^2 + y^2} \leq 5|x|.$$

Luego

$$3 - 5|x| \leq \frac{3x^2 + 5xy^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \leq 3 + 5|x|.$$

Dado que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (3 \pm 5|x|) = 3$, comprobamos que efectivamente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 + 5xy^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} = 3$$

tal como sospechamos a partir de dos caminos donde daba el mismo resultado. ■

■ **Ejemplo 3.2.5** Calcular, si existe, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} \ln(x^2 + y^2)$.

Calculamos el límite mediante un cambio a las coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ considerando que

$$(x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ es equivalente a } r \rightarrow 0^+ \text{ para cualquier } \theta.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} \ln(x^2 + y^2) = \lim_{r \rightarrow 0^+} r \ln(r^2) = \lim_{r \rightarrow 0^+} 2r \ln(r) = 0.$$

El último límite es un caso de límite indeterminado de una variable que se ha estudiado en Análisis Matemático I. ■

Resumen de estrategias:

Resumimos las distintas técnicas usadas para saber si una función $f(x, y)$ tiene límite cuando (x, y) se acerca a (x_0, y_0) , y en tal caso hallarlo:

- Por evaluación directa, para una función polinomial o racional (y, en general, para cualquier función continua como veremos a continuación): si $(x_0, y_0) \in \text{Dom}(f)$, entonces f tiene límite $L = f(x_0, y_0)$ [Ejemplo 3.2.2a)].
- Simplificando la expresión de f , de modo que se pueda evaluar directamente la expresión simplificada en (x_0, y_0) [Ejemplo 3.2.2b)].
- Por comparación (criterio del sandwich), acotando inferior y superiormente la función en un disco alrededor de (x_0, y_0) , si la función que acota inferiormente y la que acota superiormente tienen ambas límite L , entonces f tiene límite L [Ejemplo 3.2.1].
- Planteando el acercamiento a (x_0, y_0) por distintas curvas en el dominio de f que conducen a

dicho punto. Dependiendo de los resultados que se obtienen:

- si por caminos distintos da valores diferentes, entonces se puede asegurar que f no tiene límite [Ejemplo 3.2.3a),b),c)].
- si por los caminos propuestos da el mismo valor L , se puede sospechar que ese podría ser el límite; en este caso se debe justificar que el límite es L usando, por ejemplo, la definición de límite [Ejemplo 3.2.4a)].
- Utilizando coordenadas polares para transformar el límite en términos de r y θ [Ejemplo 3.2.5].

Continuidad de funciones de dos variables

Sabemos del curso de Análisis Matemático I que el concepto de función continua de una variable está asociado a la idea intuitiva de una función cuya gráfica es una curva “sin romper”, esto es, una curva sin saltos, el tipo de curva que generaría una partícula en movimiento o al mover la punta de un lápiz sin separarla del papel. Esta noción de continuidad se generaliza a funciones de varias variables. Así, para funciones de dos variables el concepto de continuidad está basado en la idea intuitiva de una función cuya gráfica es una superficie sin huecos ni rupturas.

La continuidad de una función $f(x, y)$ en un punto significa, intuitivamente, que si se cambian las coordenadas de un punto en una pequeña cantidad, entonces el valor de $f(x, y)$ cambia en una pequeña cantidad.

Definición Una función real de dos variables $f(x, y)$ es *continua* en (x_0, y_0) si:

- a) existe $f(x_0, y_0)$;
- b) existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$;
- c) se verifica que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Decimos que f es continua en una región plana D , si es continua en todo punto $(x_0, y_0) \in D$.

Usando las propiedades de los límites se puede mostrar que las sumas, productos y cocientes, así como la composición, de funciones continuas son continuas en sus dominios. Por ejemplo, una función polinomial de dos variables es continua en todo \mathbb{R}^2 ; la función exponencial, seno o coseno de cualquier polinomio en x e y también son funciones continuas en \mathbb{R}^2 ; $\ln(x^2 + y^2)$ es continua en todo el plano salvo el origen (donde: a) no está definida, y b) no tiene límite finito).

■ **Ejemplo 3.2.6** Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en todo \mathbb{R}^2 :

$$a) f(x, y) = 3 + \frac{5xy^2}{x^2 + y^2} \qquad b) g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

- a) $\text{Dom}(f) = \{(x, y) : (x, y) \neq (0, 0)\}$ y observamos que f es continua en todos los puntos de su dominio, puesto que es una función racional, bien definida en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Podemos agregar que $(0, 0)$ es un punto de discontinuidad evitable dado que, como vimos en el Ejemplo 3.2.4, existe el límite de f cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$.
- b) La función racional g es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, su dominio natural. No está definida en el origen y, como vimos en el Ejemplo 3.2.3a), no existe el límite de g cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$; esto caracteriza a $(0, 0)$ como una discontinuidad esencial de g . ■

■ **Ejemplo 3.2.7** Dada $f(x, y) = 3 + \frac{5xy^2}{x^2 + y^2}$, ¿es posible redefinir la función de modo que resulte continua en todo \mathbb{R}^2 ? Interpretar geoméricamente.

Nos preguntamos si podemos extender esta función de manera tal de lograr una (nueva) función $\tilde{f}(x, y)$ que coincida con $f(x, y)$ siempre salvo en el origen, pero que además incluya

al $(0, 0)$ en su dominio y sea continua en dicho punto. Para ello lo que hace falta es dar un valor apropiado para la función \tilde{f} en $(0, 0)$: el valor apropiado es justamente el límite de f en el origen, si existe.

Vimos en el Ejemplo 3.2.4 que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[3 + \frac{5xy^2}{x^2 + y^2} \right]$ existe y vale 3. Por lo tanto, podemos definir la nueva función $\tilde{f}(x, y)$ asignando en $(0, 0)$ dicho valor, o sea $\tilde{f}(0, 0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[3 + \frac{5xy^2}{x^2 + y^2} \right] = 3$; mientras que $\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$ para cualquier punto fuera del origen. Entonces:

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} 3 + \frac{5xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 3 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

y resulta que $\tilde{f}(x, y)$ es una función continua en todo \mathbb{R}^2 .

En términos geométricos, la gráfica de f es una superficie con un “hueco”, mientras que la gráfica de \tilde{f} es la misma superficie más el punto $(0, 0, \tilde{f}(0, 0)) = (0, 0, 3)$ que rellena el hueco. ■

Límite y continuidad de funciones de tres o más variables

Lo que hemos visto en las secciones anteriores se extiende de manera natural a funciones de tres o más variables. Así,

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = L$$

significa que los valores $f(x, y, z)$ tienden al número L cuando el punto (x, y, z) se acerca a (x_0, y_0, z_0) , por *cualquier* camino dentro del dominio de f .

La función $f(x, y, z)$ se dice *continua* en (x_0, y_0, z_0) si

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0).$$

Notar que esta relación comprende los tres puntos de la definición de continuidad dada: existe la función en el punto, existe el límite, y ambos valores coinciden.

Por ejemplo, la función

$$f(x, y, z) = \frac{4xy}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$$

es una función racional que resulta continua en todo punto de \mathbb{R}^3 *excepto* en aquellos puntos para los que se anula el denominador; en este caso, cuando $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Es decir, f es discontinua en todos los puntos de la superficie esférica que tiene centro en el origen y radio 3, mientras que en los puntos interiores y exteriores a dicha superficie, f resulta continua.

3.2.1 Ejercicios

- Suponga que $f(x, y)$ es una función tal que el $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} f(x, y) = 9$. ¿Qué puede decir del valor $f(1, 3)$? ¿Qué pasa si f es continua?
- Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,1)} (x^2 + 5y)$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{7x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2 - 1}$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}$

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^y \operatorname{sen} x}{x}$

3. En los siguientes casos encuentre el límite, si existe, o demuestre que el límite no existe:

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{|xy|}$$

$$b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 - y}$$

$$c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2 \operatorname{tg} x}{x^2 + 2y^2}$$

$$d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

4. ¿Existe el límite en el origen para cada una de las siguientes funciones?

$$a) f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$b) g(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$c) h(x, y) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

¿Para cuáles de estas funciones podría extenderse la definición al $(0, 0)$ de manera que resulten continuas? Justifique en cada caso.

5. Explique por qué cada una de las siguientes funciones es continua o discontinua:

a) La temperatura ambiente en una región como función de la latitud, longitud y tiempo.

b) El costo de un viaje en taxi como función de la distancia recorrida y el tiempo de viaje.

6. En cada uno de los siguientes casos, determine y señale en el plano xy el dominio de continuidad (el mayor conjunto en el que la función es continua):

$$a) f(x, y) = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$$

$$b) g(x, y) = \ln(2x + 3y)$$

$$c) h(x, y) = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x + \sqrt{y})$$

$$d) p(x, y) = \frac{1}{x^2 - y}$$

7. En cada uno de los siguientes casos, la función dada no está definida en el origen. ¿Se puede extender la función con continuidad a todo \mathbb{R}^2 , definiéndola de manera adecuada en $(0, 0)$?

En caso afirmativo, hágalo; en caso negativo, justifique por qué no.

$$a) f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$b) g(x, y) = \ln \left(\frac{3x^2 - x^2y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \right)$$

$$c) h(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x + y)}{x + y}$$

3.3 Derivadas parciales

Hemos visto algunos métodos para representar gráficamente funciones de 2 ó 3 variables, pero en algunos casos estos métodos no serán suficientes para comprender aún sus características más básicas. Por lo visto en Análisis Matemático I sabemos que el concepto de derivada puede brindarnos una gran ayuda en esta tarea. Por ejemplo, la derivada nos permite investigar zonas de crecimiento y de decrecimiento de una función, localizar sus máximos y mínimos, analizar la concavidad, etc., siendo todas estas herramientas muy útiles a la hora de estudiar la gráfica y el comportamiento de una función. También conocemos otras aplicaciones de la derivada. Por ejemplo, sabemos que la gráfica de una función continua no puede estar “quebrada”, pero ¿qué pasa si la función es *derivable*?, ¿qué características adicionales tiene su gráfica? La derivada se relaciona con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función. Por otro lado, la derivada de una función en cierto valor de la variable se puede interpretar como la razón instantánea de cambio de la función cuando cambia la variable.

Nos preguntamos ahora ¿cómo se extienden estos conceptos a funciones de más variables? ¿Cómo podemos, por ejemplo, analizar el “cambio” de una función de 2 variables cuando éstas cambian? En principio, podemos mirar cómo afecta a la función un “cambio parcial”, moviendo las variables de a una. Introducimos entonces el concepto de *derivación parcial*.

Sea $f(x, y)$ una función de dos variables x e y en cierto dominio D de \mathbb{R}^2 . Si asignamos un valor numérico fijo a una de las variables, por ejemplo a y , y permitimos que la otra varíe, la función f se convierte de hecho en una función de una sola variable. Por ejemplo, asignemos a y un valor fijo y_0 . ¿Cómo podemos representar gráficamente la función $f(x, y_0)$ de la única variable x ? Para ello,

trazamos en \mathbb{R}^3 la curva C_1 dada por $z = f(x, y)$, $y = y_0$, que es precisamente la curva generada por la intersección de la gráfica de $f(x, y)$ con el plano $y = y_0$, o sea, C_1 es la traza para $y = y_0$ de la gráfica de f , como se ilustra en la Figura 3.3.1.

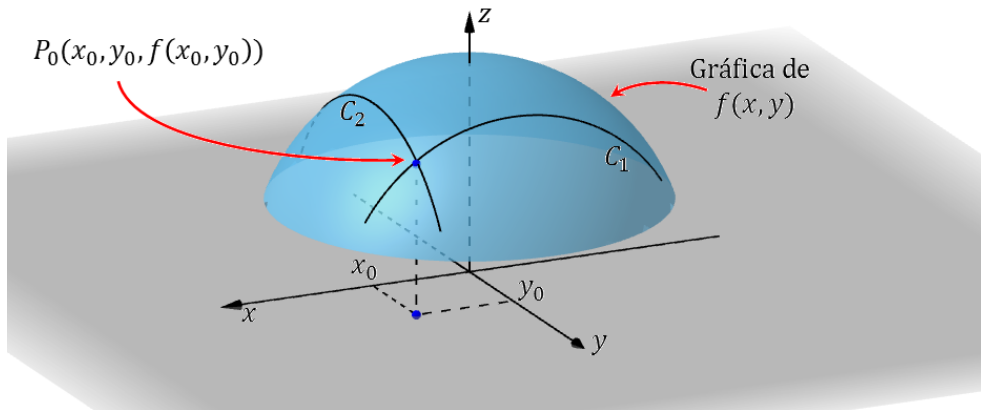


Figura 3.3.1: $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y las trazas para $y = y_0$ y para $x = x_0$ en la gráfica de $f(x, y)$.

Ubiquémonos en el plano $y = y_0$. La curva que queda definida en este plano, corresponde entonces a la gráfica de la función $F_1(x) = f(x, y_0)$ de la variable x [por ejemplo si $f(x, y) = x e^{x^2 y}$, para $y = \ln 2$, queda $F_1(x) = f(x, \ln 2) = x e^{x^2 \ln 2} = x 2^{x^2}$].

Si F_1 tiene derivada en x_0 , entonces ésta se llama derivada parcial de f con respecto a x en (x_0, y_0) , y se denota $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. O sea que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = F_1'(x_0)$. Recordando la definición de derivada de

una función de una variable, $F_1'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_1(x_0 + h) - F_1(x_0)}{h}$, resulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Notar que en este cociente incremental, la variable y se mantiene constante en el valor y_0 ; el cociente se construye evaluando la función en dos puntos próximos, con el mismo valor de $y = y_0$ y dos valores de x próximos en torno a x_0 .

En la Figura 3.3.1 se muestra la curva C_2 , obtenida como la traza para $x = x_0$ (fijo) de la gráfica de f . O sea, se genera la curva C_2 evaluando $f(x_0, y)$ para diferentes valores de y , lo que define una función $F_2(y)$. Por ejemplo si $f(x, y) = x e^{x^2 y}$, para $x = 1$ queda $F_2(y) = f(1, y) = 1 e^{1^2 y} = e^y$.

La derivada parcial de f con respecto a y en el punto (x_0, y_0) , denotada por $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, se obtiene dejando x fijo ($x = x_0$) y calculando, si existe, la derivada respecto de y en y_0 de la función de una variable $F_2(y) = f(x_0, y)$. Resulta

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Si consideramos que el punto donde se evalúan las derivadas parciales es un punto arbitrario (x, y) del dominio, tenemos dos nuevas funciones de dos variables y podemos escribir lo siguiente:

Definición Si $f(x, y)$ es una función de dos variables, sus *derivadas parciales respecto de x y de y* son las funciones definidas por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}$$

si los límites existen.

Frecuentemente también usaremos la siguiente notación para las derivadas parciales:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

(es una notación más compacta, como escribir $F'(x)$ en lugar de $\frac{dF}{dx}(x)$, pero ahora el apóstrofe no sirve, ya que debemos indicar respecto de cuál de las dos variables se está derivando parcialmente, lo que se indica con un subíndice x ó y).

Se dice que una función es de clase C^1 en una región cuando sus derivadas parciales son continuas en todo punto de dicha región. Esto implica necesariamente que la función es también continua en la región. ¿Por qué?

Las derivadas se definen como el límite de un cociente incremental, que mide cuánto cambia la función cuando cambian las variables; en definitiva compara el valor que toma la función en un punto dado de su dominio con el valor de la función cuando se mueve el punto “una cantidad pequeña”. En el caso de funciones de dos variables: $\frac{\partial f}{\partial x}$ representa la razón instantánea de cambio de f con respecto a x cuando y está fija, o sea cuando el punto se mueve en la dirección del versor \hat{i} ; análogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}$ representa la razón instantánea de cambio de f con respecto a y cuando x está fija, o sea cuando se mueve el punto en la dirección del versor \hat{j} . Podemos decir entonces que las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son derivadas de f en las direcciones dadas por los versores canónicos (unitarios) \hat{i} y \hat{j} , respectivamente.



En los siguientes recursos se visualiza a las derivadas parciales en cada punto.

<https://ggbm.at/gQVx7Xvt>

<https://ggbm.at/hQRz53xM>

■ **Ejemplo 3.3.1** Evaluar, usando la definición, las derivadas parciales de $f(x, y) = xy^2$ en $(2, 3)$.

Para evaluar los cocientes incrementales necesitamos el valor de la función en el punto $(2, 3)$ y en dos puntos próximos, uno con el mismo valor de y , otro con el mismo valor de x . Tenemos

$$\begin{aligned} f(2, 3) &= 18 \\ f(2 + h, 3) &= 9(2 + h) = 18 + 9h \\ f(2, 3 + k) &= 2(3 + k)^2 = 18 + 12k + 2k^2. \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(18 + 9h) - 18}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 9 = 9$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{(18 + 12k + 2k^2) - 18}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{12k + 2k^2}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} (12 + 2k) = 12$$

■

■ **Ejemplo 3.3.2** Determinar si existen las derivadas parciales de $f(x, y) = x^{1/2} + y^{3/2}$ en $(0, 0)$.

De acuerdo a la definición, se necesita evaluar

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^{1/2} + 0) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k > 0}} \frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{(0 + k^{3/2}) - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \sqrt{k} = 0$$

En ambos casos, los límites sólo se pueden evaluar por derecha (¿por qué?). Decimos que f no admite derivada parcial respecto de x en $(0, 0)$ pero sí respecto de y . ■

A los fines prácticos para computar las derivadas parciales es posible, aplicar las reglas de derivación válidas para funciones de una variable (manteniendo a la otra variable fija, considerándola como si fuera una constante). Entonces, si f es de clase C^1 en $D \subset \mathbb{R}^2$ y $(x_0, y_0) \in D$, para obtener $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ se puede derivar por regla y luego evaluar las expresiones de f_x y f_y en el punto (x_0, y_0) .

■ **Ejemplo 3.3.3** Si $f(x, y) = 3x^2y + y^3$, calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

Derivando por regla, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3 \cdot 2x \cdot y + 0 = 6xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 \cdot 1 + 3y^2$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, se mantuvo a la variable y constante; mientras que para hallar $\frac{\partial f}{\partial y}$ se pensó a la variable x como una constante. ■

■ **Ejemplo 3.3.4** Si $f(x, y) = x e^{x^2y}$, evaluar $f_x(1, \ln 2)$ y $f_y(1, \ln 2)$ si existen.

Para cualquier $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene

$$f_x(x, y) = 1 e^{x^2y} + x e^{x^2y} 2xy = e^{x^2y}(1 + 2x^2y), \quad f_y(x, y) = x e^{x^2y} x^2 = x^3 e^{x^2y}$$

donde usamos la regla del producto y la regla de la cadena. Ambas funciones son continuas, luego f es de clase C^1 en todo \mathbb{R}^2 . Si ahora evaluamos las funciones derivadas parciales en el punto $(1, \ln 2)$, resulta

$$f_x(1, \ln 2) = 2(1 + 2 \ln 2), \quad f_y(1, \ln 2) = 2. \quad \blacksquare$$

Ⓒ En general, se tiene que el dominio de la función derivada está incluido en (o como mucho es igual) el dominio de la función dada. Por ejemplo, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ tiene como dominio todo \mathbb{R}^2 , pero tanto $f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ como $f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ son válidas en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. En los Ejemplos 3.3.3 y 3.3.4, el dominio de f , f_x y f_y es \mathbb{R}^2 .

Sabemos de Análisis Matemático I que, en términos geométricos, una derivada se interpreta como una pendiente. Observando la Figura 3.3.1, vemos que la derivada parcial $f_x(x_0, y_0)$ puede interpretarse como la pendiente de la recta tangente en $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a la curva C_1 , que es la traza para $y = y_0$ de la superficie gráfica de f ; también la derivada parcial $f_y(x_0, y_0)$ da la pendiente de la recta tangente en $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a la curva C_2 , que es la traza para $x = x_0$ de la superficie gráfica de f [estas rectas, veremos, determinan un plano que es tangente a $S : z = f(x, y)$ en P_0].

■ **Ejemplo 3.3.5** Considerar el paraboloides del Ejemplo 3.1.10, que es la gráfica de la función de dos variables $f(x, y) = x^2 + 16y^2$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1)$, e interpretar estos números como pendientes.

Para cualquier $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 32y$
que son continuas en todo \mathbb{R}^2 , luego en el punto indicado resulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 4 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 32.$$

Además, $f(2, 1) = 20$. El plano $y = 1$ corta al paraboloides generando la parábola C_1 dada por las ecuaciones $z = x^2 + 16$, $y = 1$ [que se puede parametrizar mediante la función vectorial $\vec{r}_1(t) = (t, 1, t^2 + 16)$, $t \in \mathbb{R}$]; la pendiente de la recta tangente a C_1 en el punto $P_0(2, 1, 20)$ es $f_x(2, 1) = 4$. De modo similar, la curva generada por la intersección del plano $x = 2$ con el paraboloides es la parábola C_2 dada por las ecuaciones $z = 4 + 16y^2$, $x = 2$ [parametrizable trivialmente mediante $\vec{r}_2(t) = (2, t, 4 + 16t^2)$, $t \in \mathbb{R}$]; la pendiente de la recta tangente a C_2 en $P_0(2, 1, 20)$ es $f_y(2, 1) = 32$. ■

Derivadas parciales de funciones de tres variables

Si $f(x, y, z)$ es una función escalar de tres variables, sus *derivadas parciales* son las funciones definidas por, siempre que existan los límites:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k, z) - f(x, y, z)}{k} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z+l) - f(x, y, z)}{l} \end{aligned}$$

La derivada $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$, se calcula considerando a las variables y y a z constantes, y derivando solamente con respecto a x ; análogamente para las otras dos. Por ejemplo, si $f(x, y, z) = \sin(4x + y^2z)$, entonces $f_x(x, y, z) = 4 \cos(4x + y^2z)$, $f_y(x, y, z) = 2yz \cos(4x + y^2z)$, y $f_z(x, y, z) = y^2 \cos(4x + y^2z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Derivadas parciales de órdenes superiores

Si $f(x, y)$ es una función escalar de dos variables, sus derivadas parciales f_x y f_y son también funciones escalares de dos variables, de modo que podemos considerar las derivadas parciales de éstas últimas: $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$, y $(f_y)_y$, que se denominan *derivadas parciales segundas* de $f(x, y)$.

Emplearemos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} (f_x)_x = f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad , \quad (f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ (f_y)_x = f_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad , \quad (f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Se leen “derivada segunda de f respecto de x dos veces”, “derivada segunda de f respecto de x y de y ”, etc.

Si las cuatro derivadas parciales segundas existen y son continuas en una región $D \subset \mathbb{R}^2$, se dice que f es de clase C^2 en D . Esto implica necesariamente que la función f y sus 2 derivadas primeras también son continuas en la región D . ¿Por qué?

■ **Ejemplo 3.3.6** Calcular las derivadas parciales segundas de la función $f(x, y) = \cos(xy) + x \cos y$.

Empezamos calculando las derivadas parciales primeras de f :

$$f_x(x, y) = -y \operatorname{sen}(xy) + \cos y, \quad f_y(x, y) = -x \operatorname{sen}(xy) - x \operatorname{sen} y.$$

Derivando f_x respecto de x y de y , se obtiene:

$$f_{xx}(x, y) = -y^2 \cos(xy), \quad f_{xy}(x, y) = -\operatorname{sen}(xy) - xy \cos(xy) - \operatorname{sen} y,$$

mientras que derivando f_y respecto de x y de y , se obtiene:

$$f_{yx}(x, y) = -\operatorname{sen}(xy) - xy \cos(xy) - \operatorname{sen} y, \quad f_{yy}(x, y) = -x^2 \cos(xy) - x \cos y.$$

■

Observamos el Ejemplo 3.3.6 que se repiten dos resultados. Si bien no ocurre siempre, para la mayoría de las funciones que usaremos en la práctica las *derivadas parciales mixtas* (o *cruzadas*) f_{xy} y f_{yx} resultan iguales. El siguiente teorema nos dice bajo qué condiciones es válido que $f_{xy} = f_{yx}$:

Teorema 3.3.1 – Teorema de Clairaut. Sea $f(x, y)$ una función definida en una región abierta $D \subset \mathbb{R}^2$ que contiene al punto (x_0, y_0) . Si las funciones f_{xy} y f_{yx} son continuas en D , entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

En el caso de una función escalar de tres variables, ¿cuántas derivadas parciales segundas tiene? Calcúlelas para el ejemplo $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(4x + y^2z)$. ¿Y una función de n variables?

Aplicación: ecuaciones diferenciales parciales

Las derivadas parciales (primeras y segundas) juegan un rol importante en Física, por ejemplo, donde a partir del planteo de una situación se llega a una relación entre distintas derivadas parciales de una función desconocida. Entonces se trata de averiguar cuál (o cuáles) funciones satisfacen dicha *ecuación diferencial a derivadas parciales*. No estudiaremos aquí las técnicas para resolver ecuaciones diferenciales parciales pero sí, a modo de práctica, comprobaremos que una función dada y sus derivadas parciales verifican cierta ecuación diferencial.

Ejercicio Ecuación de Laplace. Compruebe que la función $u(x, y) = \cos(x^2 - y^2) \cosh(2xy)$ satisface la ecuación diferencial conocida como *ecuación de Laplace*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

3.3.1 Ejercicios

1. Utilice la definición de derivada parcial para hallar $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$, en los siguientes casos:

a) $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$, $(x_0, y_0) = (-1, 3)$

b) $f(x, y) = \sqrt{3x - y}$, $(x_0, y_0) = (2, 1)$

2. Encuentre, si existen, la o las derivadas parciales en $(0, 0)$ de

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

3. Encuentre las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones, indicando sus dominios:

a) $f(x, y) = xy^2 + 2xy + 7x$

b) $f(x, y) = y \ln x$

c) $f(x, y) = e^{xy} + \operatorname{sen}(x^2 + y)$

d) $f(x, y) = x^y$

e) $f(s, t) = \frac{st^2}{s^2 + t^2}$

f) $f(x, y, z) = \cos(ze^{xy}) \operatorname{sen} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} z$

g) $f(x, y, z) = xyz + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

[Recordatorio: $(a^x)' = a^x \ln a$, siendo a una constante positiva; $(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.]

4. Calcule las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(3, 4)$

b) $f(x, y) = x^2 + \ln(x^2 + y^2)$, $(0, 1)$

c) $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 3y)$, $(-6, 4)$

d) $f(u, v, w) = w \operatorname{tg}(uv)$, $(2, 0, 3)$

e) $f(x, y, z) = \frac{x}{y+z}$, $(3, 2, 1)$

5. Encuentre las derivadas parciales primeras para funciones de la forma: a) $f(x, y) = M(x) + N(y)$, b) $f(x, y) = M(x)N(y)$, donde $M(x)$ y $N(y)$ son funciones reales de una variable con las propiedades adecuadas. Dé un par de ejemplos.

6. Calcule todas las derivadas parciales segundas para cada una de las siguientes funciones, y verifique el teorema de Clairaut en el dominio que corresponda en cada caso:

a) $f(x, y) = e^y + \frac{y}{x} + xe^{-y}$

b) $f(x, y) = e^{-xy^2} + y^3 x^2$

7. a) Verifique que la función $u(x, t) = e^{-2t} \operatorname{sen}(4x)$ es una solución de la ecuación diferencial llamada *ecuación de conducción del calor*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

y determine cuál es el valor de la constante a .

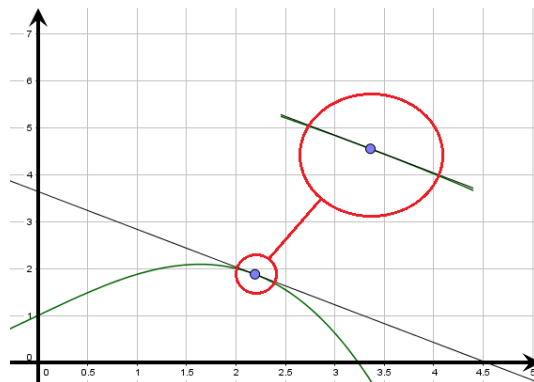
- b) Encuentre la constante de proporcionalidad entre u_{tt} y u_{xx} para la función $u(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$, siendo A, k, ω constantes. Obtendrá así una ecuación diferencial, la *ecuación de onda*, que modela las ondas transversales en una cuerda, donde u es la altura de un elemento de cuerda como función de la posición x del elemento y de la variable temporal t . Observe que si k tiene unidades de $1/\text{m}$ y ω de $1/\text{s}$, entonces la constante de proporcionalidad se mide en $(\text{m}/\text{s})^2$ (y representa, de hecho, el cuadrado de la velocidad de la onda).

3.4 Diferenciabilidad, aproximación lineal y plano tangente

Pensemos en una función $F(x)$ de una variable y su aproximación lineal alrededor de un valor x_0 de su dominio. Sabemos de Análisis Matemático I que al acercarnos suficientemente a un punto de la gráfica (en \mathbb{R}^2) de una función derivable, la curva $y = F(x)$ no se distingue de la recta tangente en dicho punto y podemos aproximar *localmente* la función F con una función lineal [justamente, el polinomio de Taylor de primer orden: $L(x) = P_1(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$, que gráficamente corresponde a la recta tangente.

Nos interesa ahora desarrollar ideas similares para una función $f(x, y)$ de dos variables. Esto es, que-

remos extender la idea de derivabilidad a un nuevo concepto (“diferenciabilidad”), que garantice la aproximación lineal de la función f . Dicho en términos geométricos, queremos que al acercarnos suficientemente a un punto de la gráfica (en \mathbb{R}^3) de una función diferenciable de dos variables, la superficie $z = f(x, y)$ no se distinga del plano tangente en dicho punto, y entonces podamos aproximar localmente la función mediante una función lineal de dos variables (la que corresponde gráficamente al plano tangente).



3.4.1 Diferenciabilidad

Para motivar la noción de “diferenciabilidad” para funciones de dos variables, supondremos primero que $f(x, y)$ es una función tal que su superficie gráfica S , dada por $z = f(x, y)$, admite plano tangente en un punto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, y analizaremos cómo debe ser la ecuación de dicho plano pensando en que queremos que sea una “buena” aproximación de f cerca de (x_0, y_0) . Para esto, recordemos que un plano (no vertical) tiene una ecuación de la forma

$$z = a + b_1x + b_2y.$$

Ahora bien, un plano que es tangente a S en un punto P_0 , deberá contener a las rectas tangentes en P_0 a cada una de las curvas que están en S y pasan por P_0 (ver Figura 3.3.1). En particular, las trazas C_1 y C_2 para $y = y_0$ y $x = x_0$ en S , respectivamente, son curvas que están en S y pasan por P_0 ; además, la recta que es tangente a cada una de estas curvas en P_0 tiene como pendiente una derivada parcial de f . Por lo tanto, el plano tangente deberá contener a estas rectas tangentes, o sea que en la ecuación propuesta para el plano tangente debe ser $b_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ y $b_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. La constante a se determina fácilmente teniendo en cuenta que el plano debe pasar por P_0 , o sea que se debe satisfacer que $a + b_1x_0 + b_2y_0 = f(x_0, y_0)$. Así, si hay plano tangente a la gráfica de f en P_0 , obtenemos la siguiente ecuación del plano:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Ahora nos queda definir el concepto de diferenciabilidad, y lo haremos de manera tal que el plano dado por la ecuación anterior sea una “buena aproximación” a la gráfica de f cerca del punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, cuando f sea diferenciable. Para tener una idea de lo que significa “buena aproximación” recordemos lo visto en Análisis Matemático I: si $F(x)$ es una función derivable en x_0 entonces existe el límite del cociente incremental y

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(x_0).$$

Luego se tiene $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - F'(x_0) = 0$, de donde resulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - [F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} = 0.$$

Es decir que si F es derivable en x_0 , la recta tangente está cerca de la gráfica de F en el sentido que la diferencia entre $F(x)$ y $L(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$ se hace cero aún al dividirse por $x - x_0$, cuando x tiende a x_0 . Ésta es la idea de “buena aproximación” que queremos adaptar a funciones de varias variables, reemplazando la noción de recta tangente por la de plano tangente.

Definición Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es *diferenciable* en $(x_0, y_0) \in D$ si existen $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, y además

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - \left[f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \right]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Veamos la relación entre continuidad, diferenciabilidad y derivabilidad (existencia de derivadas parciales).

Recordemos, para una función $F(x)$ de una variable, el teorema que asegura que si F es derivable (o sea, si existe F') en x_0 , entonces F es continua en x_0 . En el caso de una función $f(x, y)$ de dos variables se tiene el siguiente teorema:

Teorema 3.4.1 Si $f(x, y) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $(x_0, y_0) \in D$, entonces f es continua en (x_0, y_0) .

Es importante resaltar que NO alcanza con que existan las derivadas parciales f_x y f_y en el punto para que f sea diferenciable. El concepto de diferenciabilidad es “más fuerte” que el de derivabilidad. Dicho de otra forma, la existencia de derivadas parciales es una condición necesaria (pero no suficiente) para que una función sea diferenciable. Veamos en un ejemplo que la sola existencia de derivadas parciales NO implica continuidad ni diferenciabilidad de la función.

■ **Ejemplo 3.4.1** Sea la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Indicar si f posee derivadas parciales en $(0, 0)$, y si f es continua y/o diferenciable en $(0, 0)$.

Mediante cálculo por definición vemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot k}{0^2+k^2} - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0.$$

Luego las derivadas parciales existen (y valen ambas cero) en $(0, 0)$.

Pero f no es continua en $(0, 0)$ porque no existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$, como puede probarse acercándose al origen por los ejes coordenados (donde $f = 0$) o por cualquier otro camino $y = mx, m \neq 0$, donde $f = \frac{m}{1+m^2} \neq 0$.

En resumen: i) la función dada admite derivadas parciales en el origen; ii) sin embargo, f no es continua en $(0, 0)$; iii) por lo tanto, no será diferenciable en dicho punto. ■

- Ⓒ La última afirmación del ejemplo anterior se justifica a través de la negación lógica de la propiedad que dice que “diferenciabilidad implica continuidad”.

Corolario 3.4.1.1 Si f no es continua en (x_0, y_0) , entonces f no es diferenciable en (x_0, y_0) .

Podemos observar que en general es fácil decidir si existen o no las derivadas parciales de una función. Sin embargo, la condición de diferenciabilidad que figura en la definición no es fácil de verificar en la mayoría de los casos. Afortunadamente existe un criterio sencillo, dado en el siguiente teorema que nos brinda una condición suficiente para que una función sea diferenciable:

Teorema 3.4.2 – Condición suficiente para diferenciabilidad. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, y sea $(x_0, y_0) \in D$. Si existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$, y además éstas son continuas en un entorno de (x_0, y_0) , entonces f es diferenciable en (x_0, y_0) .

3.4.2 Plano tangente

Habiendo definido el concepto de diferenciabilidad, podemos ahora dar una definición precisa de plano tangente a la gráfica de una función diferenciable:

Definición Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $(x_0, y_0) \in D$. Una ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

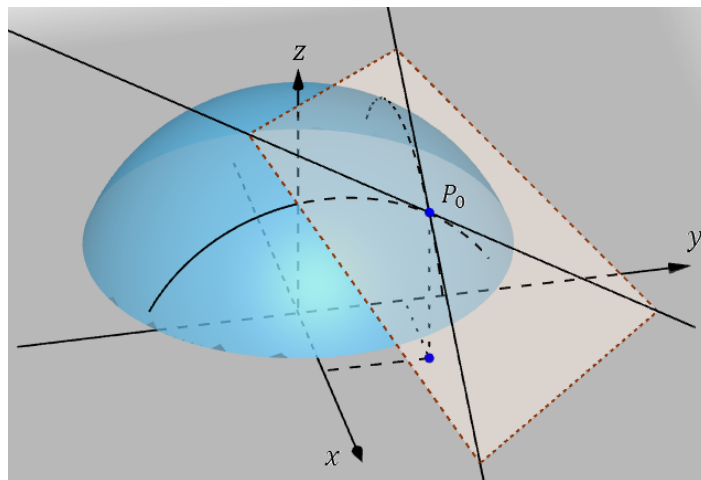


Figura 3.4.1: Plano tangente a la gráfica de una función diferenciable.

- **Ejemplo 3.4.2** Dar una ecuación del plano tangente a la gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^4 + e^{xy}$ en el punto $P_0(1, 0, 2)$.

La función dada es diferenciable en todo \mathbb{R}^2 . Luego su gráfica admite plano tangente en todo punto. Para $(x_0, y_0) = (1, 0)$ se tiene $f(1, 0) = 2$, luego $P_0(1, 0, 2)$ pertenece a la gráfica de f . Tiene sentido entonces buscar el plano tangente a la gráfica de f en $(1, 0, 2)$.

Las derivadas parciales de f son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + ye^{xy} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 + xe^{xy}$$

y evaluándolas en $(1, 0)$ dan

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 2 \cdot 1 + 0e^{1 \cdot 0} = 2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 4 \cdot 0 + 1e^{1 \cdot 0} = 1.$$

Así, una ecuación del plano tangente a la superficie gráfica de f dada por $z = x^2 + y^4 + e^{xy}$, en el punto $P_0(1, 0, 2)$ es

$$z = 2 + 2(x - 1) + 1(y - 0)$$

que puede simplificarse como $2x + y - z = 0$. ■

Muestre que en el Ejemplo 3.3.5, el plano tangente a la gráfica de $f(x, y) = x^2 + 16y^2$ (la gráfica es un paraboloides elíptico) en el punto $(2, 1, 20)$, tiene ecuación $z = 20 + 4(x - 2) + 32(y - 1)$, que también puede escribirse como $4x + 32y - z - 20 = 0$.

3.4.3 Aproximación lineal

Vimos que si $f(x, y)$ es diferenciable en un punto (x_0, y_0) de su dominio, entonces la gráfica de f admite plano tangente en el punto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Sabemos también que este plano tangente Π_T es localmente una “buena aproximación” a la gráfica de f cerca de P_0 . Ahora bien Π_T , siendo una superficie plana, puede interpretarse como la superficie gráfica de otra función de dos variables, ya no de f (salvo que ésta sea lineal), sino de una función lineal.

Recordando la ecuación para el plano tangente a la gráfica de f en $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, deducimos que la función lineal de dos variables cuya gráfica es el plano Π_T , se expresa como

$$L(x, y) = P_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

y se denomina *linealización* de f en (x_0, y_0) , o también *polinomio de Taylor de primer orden* alrededor de (x_0, y_0) . Para poder obtener la linealización de una función f , ésta debe ser de clase C^1 (por lo tanto, diferenciable) en el punto, lo que en términos geométricos significa que la gráfica de la función f admite plano tangente.

Por medio de la linealización se puede obtener una estimación aproximada de f cerca de (x_0, y_0) , como

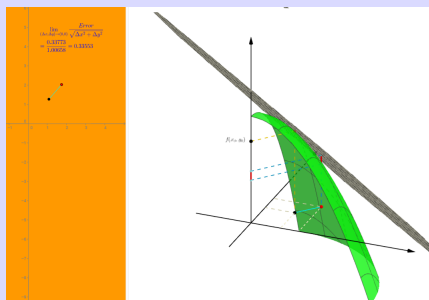
$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

que se llama *aproximación lineal* de f centrada en (x_0, y_0) .

- © Salvo que la función f sea lineal (o una función constante), existirá una diferencia entre el valor exacto de la función en un par (x, y) [distinto pero próximo a (x_0, y_0)] y el valor dado por la aproximación lineal en (x, y) (esa diferencia se conoce como residuo o resto de Taylor). Típicamente, cuanto más cerca esté (x, y) de (x_0, y_0) , tanto menor será esa diferencia. Por otro lado, una manera de mejorar la estimación de f en (x, y) sería mediante una aproximación de orden superior, por ejemplo con una aproximación cuadrática o polinomio de Taylor de segundo orden, que incluye en su definición las derivadas parciales segundas de f evaluadas en (x_0, y_0) .



En el siguiente recurso se puede comparar la función y su linealización, calculando el error relativo en forma dinámica: <https://ggbm.at/hxEcrXwj>



■ **Ejemplo 3.4.3** Considerar la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ cerca del punto $(-1, 1)$ de su dominio. Sabiendo que es diferenciable en dicho punto (por ser polinomial), hallar: *a*) una ecuación para el plano tangente a la gráfica de f por el punto $(-1, 1, f(-1, 1))$; *b*) la linealización de f centrada en $(-1, 1)$; *c*) la aproximación lineal para f en $(-1, 1)$.

- a*) Para hallar la ecuación del plano tangente debemos evaluar la función y sus derivadas parciales primeras en $(-1, 1)$. Tenemos que $f(-1, 1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 1) = -2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1) = 2$. Por lo tanto, el plano tangente a la gráfica de f por el punto $(-1, 1, f(-1, 1))$ es el plano dado por la ecuación

$$z = 2 - 2(x + 1) + 2(y - 1)$$

- b*) La linealización de f centrada en $(-1, 1)$ está dada por la función

$$L(x, y) = 2 - 2(x + 1) + 2(y - 1)$$

cuya gráfica es la superficie $z = -2x + 2y - 4$, precisamente el plano tangente a la gráfica de f en $(-1, 1, 2)$.

- c*) La aproximación lineal de f centrada en $(-1, 1)$ está dada por la expresión

$$f(x, y) \approx 2 - 2(x + 1) + 2(y - 1)$$

Esto significa que si queremos “estimar” (sin calcular exactamente) cuánto vale la función f en un punto del dominio cercano al $(-1, 1)$, por ejemplo en $(-0.9, 1.05)$, un valor aproximado razonable “a primer orden” es

$$f(-0.9, 1.05) \approx L(-0.9, 1.05) = 2 - 2(-0.9 + 1) + 2(1.05 - 1) = 2 - 2(0.1) + 2(0.05) = 1.9$$

De hecho este es el valor aproximado “más razonable a primer orden” para estimar $f(-0.9, 1.05)$.

Por curiosidad, halle el valor exacto de f en $(-0.9, 1.05)$ y calcule la diferencia que hay con el valor aproximado. ¿Es muy grande la diferencia? ¿Qué ocurrirá si realiza el cálculo estimativo para un punto más cercano a $(-1, 1)$, por ejemplo para $(-1.001, 0.95)$?



3.4.4 Ejercicios

1. Analice la continuidad y la diferenciabilidad en \mathbb{R}^2 de la función $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}$.
2. Determine justificadamente el mayor subconjunto de \mathbb{R}^2 en el que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua. ¿Es diferenciable f en el origen? Justifique.

3. Considere la superficie S dada por $z = 3x^2 - y^2 + 2x$ (¿de qué cuádrlica se trata?). Dé una función de dos variables cuya gráfica sea S . Si el punto $(1, -2, 1) \in S$, encuentre una ecuación para el plano tangente a S en dicho punto. Obtenga ecuaciones para la recta que pasa por el punto dado y es perpendicular al plano tangente hallado.
4. Determine justificadamente si las siguientes funciones son diferenciables en los puntos indicados. En caso afirmativo, halle una ecuación del plano tangente a la gráfica de la función en dicho punto.
 - a) $f(x, y) = xy$, $(0, 0)$
 - b) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$, $(0, 1)$
 - c) $f(x, y) = e^x \cos(xy)$, $(0, 0)$
 - d) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, $(0, 1)$
5. Encuentre, si existe, la linealización $L(x, y)$ de la función f en el punto indicado:
 - a) $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 y^2}$, $(0, 2)$
 - b) $f(x, y) = y \ln x$, $(2, 1)$
6. Encuentre la aproximación lineal de la función $f(x, y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ en $(2, 1)$, y utilícela para estimar aproximadamente $f(1.95, 1.08)$.
7. Pruebe que las gráficas de $f(x, y) = x^2 + y^2$ y de $g(x, y) = -x^2 - y^2 + xy^3$, tienen el mismo plano tangente en el origen de coordenadas. Encuentre la linealización de dichas funciones en $(0, 0)$. ¿Es la misma función? Justifique.

3.5 Composición de funciones de varias variables. Reglas de la cadena.

En Análisis Matemático I se consideró la composición de una función de 1 variable con otra función también de 1 variable: la composición de $x(u)$ con $f(x)$ da $F(u) = (f \circ x)(u) = f(x(u))$, que depende de la variable u . Para obtener la derivada de una función compuesta (siempre que las funciones que se componen sean derivables), utilizamos la regla de la cadena:

$$\frac{dF}{du} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{du}$$

o, escrito de otra forma:

$$F'(u) = f'(x(u)) x'(u).$$

En el contexto de las funciones de varias variables, también podemos hacer composiciones pero ahora las opciones son diversas. Veamos diferentes formas de composición entre funciones de varias variables, y las reglas de derivación correspondientes en cada caso.

3.5.1 Composición de funciones de varias variables.

Consideremos la siguiente situación: en cierta región plana, se conoce la temperatura en función de la posición, $T(x, y)$. Si una persona camina por esa región siguiendo una curva tal que sus coordenadas son $x(t)$ e $y(t)$, ¿qué temperatura medirá en función del tiempo? [recuerde el

comentario al final de la Sección 3.1.1, donde nos preguntamos cuánto vale una función f si la evaluamos en los puntos de una curva arbitraria C parametrizada por $\vec{r}(t)$: lo denotamos $f(\vec{r}(t))$. La persona que quiere medir la temperatura a medida que se mueve por la región debe calcular $T(x, y)$ para $x = x(t)$ e $y = y(t)$, esto es la *función compuesta*: $\mathcal{T}(t) = T(x(t), y(t)) = T(\vec{r}(t))$, que resulta ser una (nueva) función \mathcal{T} de una sola *variable independiente*, t . A esta situación (que llamaremos “caso 2×1 ”, ya que se combina una función de 2 variables con otras de 1 variable), la podemos simbolizar mediante el siguiente diagrama que nos ayudará a identificar cuál es la variable independiente en la composición:

$$\mathcal{F}(u) = f(x(u), y(u)) : \quad f \begin{array}{c} \swarrow x \\ \searrow y \end{array} \begin{array}{c} \swarrow \\ \searrow \end{array} u$$

donde cada línea se lee de izquierda a derecha como “depende de”.

■ **Ejemplo 3.5.1** Para $f(x, y) = 5xy + x^2 + y^2$, donde $x(u) = \cos u$, $y(u) = \sin u$, la composición da $\mathcal{F}(u) = f(\cos u, \sin u) = 5 \cos u \sin u + 1$ como función de $u \in \mathbb{R}$. ■

Consideremos ahora el resultado de evaluar una función $f(x, y, z)$ de 3 variables donde cada variable depende a su vez de otra: $x = x(u)$, $y = y(u)$ y $z = z(u)$. A esta situación (que llamaremos “caso 3×1 ”), la simbolizamos diagramáticamente como

$$\mathcal{F}(u) = f(x(u), y(u), z(u)) : \quad f \begin{array}{c} \swarrow x \\ - y \\ \searrow z \end{array} \begin{array}{c} \swarrow \\ - \\ \searrow \end{array} u$$

Vemos que la función compuesta depende de 1 variable independiente, y tiene como dominio natural todos los valores de u permitidos por la composición.

■ **Ejemplo 3.5.2** Para $f(x, y, z) = \ln(x - y + z)$, donde $x(u) = u^2$, $y(u) = 2u$, $z(u) = 1$, la composición da $\mathcal{F}(u) = f(u^2, 2u, 1) = \ln(u^2 - 2u + 1) = 2 \ln |u - 1|$ como función de $u \neq 1$. ■

Siguiendo la misma idea, genere un diagrama para el “caso $n \times 1$ ” para algún $n > 3$. Ejemplifique. Pasemos ahora a esta otra situación: se quiere convertir a grados Fahrenheit, la temperatura dada en grados Celsius en una placa bidimensional. Sabiendo que $T_F(T_C) = 32 + \frac{9}{5}T_C$ donde $T_C = T_C(x, y)$, resulta $\mathcal{T}_F(x, y) = T_F(T_C(x, y))$, que es una función de dos variables independientes. A esta situación (“caso 1×2 ”), que resulta de evaluar una función $f(x)$ de 1 variable que depende a su vez de otras 2, $x = x(u, v)$, la simbolizamos como

$$\mathcal{F}(u, v) = f(x(u, v)) : \quad f - x \begin{array}{c} \swarrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} u \\ v \end{array}$$

Con la misma idea, ¿cómo será el “caso $1 \times m$ ” para algún $m > 2$? Arme el diagrama, e identifique la o las variables independientes de la función compuesta. Ejemplifique.

Una situación más general, el “caso $n \times m$ ”, está dada por el resultado de evaluar una función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde cada $x_i = x_i(u_1, u_2, \dots, u_m)$; la función compuesta depende de m variables independientes.

Hay otras combinaciones posibles, por supuesto: como ejemplo $f(x, y, z)$ donde $x = x(u, v, t)$, $y = y(v, w)$, y $z = z(u, v, w)$ termina dando una función compuesta $\mathcal{F}(u, v, w, t)$ de 4 variables independientes. Arme el diagrama para este caso.

- Ⓒ ¿Por qué insistir en cuáles son las *variables independientes* de la *función compuesta*? Entre otras cosas, porque vamos a calcular la variación de la función compuesta, esto es, derivarla “respecto de sus variables”.

3.5.2 Reglas de la cadena para derivar funciones compuestas de varias variables

Supondremos que todas las funciones involucradas a continuación son diferenciables. Daremos las reglas de derivación como propiedades que pueden ser demostradas.

Para empezar, veamos el caso 2×1 de la función compuesta $\mathcal{F}(u) = f(x(u), y(u))$.

Es claro que cuando la variable independiente u cambie, la función $\mathcal{F}(u)$ cambiará. ¿Cómo? Mirando la composición notamos que un cambio en u provoca que la variable intermedia x cambie, por lo que se va a producir un cambio (parcial) de f ; y además el cambio en u provoca que la variable intermedia y cambie, por lo que se va a producir otro cambio (parcial) de f . Entonces, de manera similar a la regla de la cadena para una función de 1 variable, se puede probar en este caso:

Regla de la cadena Caso 2×1

$$\text{Si } \mathcal{F}(u) : f \begin{array}{c} \swarrow x \\ \searrow y \end{array} u, \quad \text{entonces} \quad \frac{d\mathcal{F}}{du} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{du}$$

o, escrito de otra forma:

$$\mathcal{F}'(u) = f_x(x(u), y(u)) x'(u) + f_y(x(u), y(u)) y'(u).$$

El diagrama que dibujamos nos ayuda a recordar la regla, si asignamos a cada línea la frase “derivada respecto de”; observamos que hay una contribución “pasando” por x y otra “pasando” por y , que se suman para dar el cambio global de \mathcal{F} . Notar que hemos tenido cuidado en escribir derivadas parciales o totales, según corresponda.

- **Ejemplo 3.5.3** Sea $f(x, y) = 5xy + x^2 + y^2$ la función que mide la temperatura en cada punto (x, y) del plano. Supongamos que un objeto se mueve sobre la curva dada por $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$.
- Derivar $\mathcal{F}(t) = f(x(t), y(t))$ respecto de t , aplicando la regla de la cadena.
 - Hallar explícitamente la función compuesta $\mathcal{F}(t)$, y derivarla.
 - Discutir ambos resultados.

- Aplicando la regla de la cadena, el resultado es: $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = [5y(t) + 2x(t)](-\sin t) + [5x(t) + 2y(t)]\cos t$, donde al incorporar las funciones $x(t)$ e $y(t)$ se obtiene la expresión en términos de la variable independiente t .
- La función compuesta resulta explícitamente $\mathcal{F}(t) = f(x(t), y(t)) = 5 \cos t \sin t + (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 5(\cos t)(\sin t) + 1$. Derivando directamente esta expresión, se tiene: $\mathcal{F}'(t) = 5(-\sin t) \sin t + 5 \cos t \cos t = 5(-\sin^2 t + \cos^2 t)$, para cualquier $t \in \mathbb{R}$.
- Se puede verificar (hágalo) que si en el inciso a) se escriben las variables intermedias x e y en términos de t , se obtiene exactamente el mismo resultado que en b). La diferencia es que en a), usando la regla de la cadena, aún sin haber hallado la expresión para $\mathcal{F}(t)$ fue posible obtener $\mathcal{F}'(t)$ (esto puede ser una ventaja para tratar con algunos problemas).

Si bien en muchos casos la derivada de la función compuesta puede calcularse directamente a partir de la expresión que se obtiene luego de componer las funciones, hay casos en los que no se conoce la expresión explícita de alguna de las funciones que se componen pero sí sus derivadas, como en el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 3.5.4** Supongamos que $f(x, y)$ es una función diferenciable, cuya expresión no es conocida, pero se sabe que su gráfica tiene plano tangente en el punto $(1, 0, f(1, 0))$ de ecuación $z = 4x + 3y - 1$. Si $x = t^2 + 1$ e $y = t^3 + t$, se define $\mathcal{F}(t) = f(x(t), y(t))$. Hallar $\mathcal{F}'(0)$.

Observamos que $\mathcal{F}(0) = f(x(0), y(0)) = f(1, 0)$ y sabiendo que f es diferenciable y que la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 0, f(1, 0))$ es $z = 4x + 3y - 1$, podemos deducir que $f(1, 0) = 3$. Además, como $z = 4x + 3y - 1 = 4(x - 1) + 3(y - 0) + 3$ podemos también deducir que $f_x(1, 0) = 4$ y $f_y(1, 0) = 3$.

Usando la regla de la cadena, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(0) &= f_x(x(0), y(0)) x'(0) + f_y(x(0), y(0)) y'(0) \\ &= f_x(1, 0)x'(0) + f_y(1, 0)y'(0) \\ &= 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3. \end{aligned}$$

■

De manera similar al caso anterior, la regla de la cadena para el caso 3×1 de la función compuesta $\mathcal{F}(u) = f(x(u), y(u), z(u))$ es:

Regla de la cadena Caso 3×1

$$\text{Si } \mathcal{F}(u) : \begin{array}{c} \diagup \quad x \quad \diagdown \\ f - \quad y \quad - \\ \diagdown \quad z \quad \diagup \end{array} u, \quad \text{entonces} \quad \frac{d\mathcal{F}}{du} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{du} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{du}$$

o, escrito de otra forma:

$$\mathcal{F}'(u) = f_x(x(u), y(u), z(u)) x'(u) + f_y(x(u), y(u), z(u)) y'(u) + f_z(x(u), y(u), z(u)) z'(u).$$

Nuevamente, el diagrama que dibujamos nos ayuda a recordar la regla: ahora se deriva “pasando” por x , por y y por z , y se suman las tres contribuciones.

Regla de la cadena Caso $n \times 1$

Escriba la regla general para cualquier n (tome algún $n > 3$).

Pasemos ahora al “caso 1×2 ” de la función $\mathcal{F}(u, v) = f(x(u, v))$. Nos encontramos con una situación distinta a las anteriores, porque la función compuesta tiene 2 variables independientes, u y v , y entonces se podrá derivar \mathcal{F} parcialmente respecto de cada una de ellas. Se puede probar la siguiente regla.

Regla de la cadena Caso 1×2

$$\text{Si } \mathcal{F}(u, v) : \begin{array}{c} \quad \quad \quad u \\ f - x \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad v \end{array}, \quad \text{entonces} \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} = \frac{df}{dx} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} = \frac{df}{dx} \frac{\partial x}{\partial v} \end{cases}$$

o, escrito de otra forma:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_u(u, v) = f'(x(u, v)) x_u(u, v) \\ \mathcal{F}_v(u, v) = f'(x(u, v)) x_v(u, v) \end{cases}$$

Observando el diagrama, vemos que ahora hay “dos vías independientes”: se varía u (lo que hace variar a x y por consiguiente a f) o, por separado, se varía v (lo que hace variar a x y por consiguiente a f). No daremos aquí la demostración de esta propiedad (puede consultar la bibliografía) pero veamos que es razonable: efectivamente, dado que “derivada parcial respecto de u ” significa “dejar la otra variable, v , fija”, la expresión $\mathcal{F}_u = f' x_u$ tiene la misma forma (para cada v fija) que la que recordamos en la introducción de esta sección para funciones de 1 variable; el mismo análisis vale para la otra expresión, $\mathcal{F}_v = f' x_v$, con u fija ahora. Notar dónde corresponden derivadas totales y dónde parciales (¿están bien escritas?).

Regla de la cadena Caso $1 \times m$

Con la misma idea, ¿cómo será el “caso $1 \times m$ ” para algún $m > 2$?

■ **Ejemplo 3.5.5** Sea $f(x) = x^2$, donde $x = x(u, v, w) = e^{u+2v+3w}$. a) Derivar la función compuesta $f(x(u, v, w))$ respecto de sus variables independientes, aplicando la regla de la cadena. b) ¿Cuánto valen, si existen, la función y sus derivadas parciales primeras en el origen?

a) Dado que la función compuesta, que llamaremos \mathcal{F} , posee 3 variables independientes, u , v y w , se podrán calcular 3 derivadas parciales de \mathcal{F} . Por similitud con el caso 1×2 , podemos sospechar (de hecho, se puede probar) que la regla en el caso 1×3 es:

$$\text{Si } \mathcal{F}(u, v, w) : \quad \begin{array}{c} f - x \quad / \quad u \\ \quad \quad - \quad v \\ \quad \quad \quad \backslash \quad w \end{array} \quad , \text{ entonces } \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} = \frac{df}{dx} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} = \frac{df}{dx} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w} = \frac{df}{dx} \frac{\partial x}{\partial w} \end{array} \right. .$$

En este ejemplo resulta

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_u(u, v, w) = 2 x(u, v, w) e^{u+2v+3w} \\ \mathcal{F}_v(u, v, w) = 2 x(u, v, w) 2 e^{u+2v+3w} \\ \mathcal{F}_w(u, v, w) = 2 x(u, v, w) 3 e^{u+2v+3w} \end{array} \right.$$

para cualquier $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$.

b) En particular cuando $(u, v, w) = (0, 0, 0)$, la variable intermedia vale $x(0, 0, 0) = 1$. Entonces $\mathcal{F}(0, 0, 0) = f(x(0, 0, 0)) = f(1) = 1^2 = 1$; y se tiene $\mathcal{F}_u(0, 0, 0) = 2$, $\mathcal{F}_v(0, 0, 0) = 4$, $\mathcal{F}_w(0, 0, 0) = 6$. ■

Para funciones compuestas más generales, ¿cómo se aplica la regla de la cadena? Veamos algunos ejemplos.

■ **Ejemplo 3.5.6** Supongamos que $f(x, y)$ es una dada función diferenciable en \mathbb{R}^2 , y que cada punto (x, y) es expresado con otras variables (u, v) en la forma $x = x(u, v) = u^2 - v^2$, $y = y(u, v) = v^2 - u^2$. Hallar las derivadas parciales de la función compuesta

Para la función compuesta $\mathcal{F}(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ (haga el diagrama 2×2), la regla

de la cadena tendrá la forma

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \end{cases}$$

Luego, en este ejemplo resulta

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} 2u + \frac{\partial f}{\partial y} (-2u) \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} (-2v) + \frac{\partial f}{\partial y} 2u \end{cases}$$

■

Ejercicio En relación al Ejemplo 3.5.6. Verificar que para cualquier f se cumple la ecuación diferencial

$$v \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} + u \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} = 0$$

■ **Ejemplo 3.5.7** Deducir la regla de la cadena que permite hallar todas las derivadas parciales de una función compuesta de la forma $\mathcal{F}(u, v, w, t) = f(x(u, v, t), y(v, w), z(u, v, w))$.

Se puede deducir que las cuatro derivadas parciales estarán dadas por

$$\begin{cases} \mathcal{F}_u = f_x x_u & + f_z z_u \\ \mathcal{F}_v = f_x x_v & + f_y y_v + f_z z_v \\ \mathcal{F}_w = & f_y y_w + f_z z_w \\ \mathcal{F}_t = f_x x_t \end{cases}$$

■

3.5.3 Ejercicios

- Utilice la regla de la cadena para derivar $\frac{x}{y}$ donde $x = re^{st}$ e $y = rse^t$. Evalúe cuando $r = 1, s = 2, t = 0$.
- Dada la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, donde $x(r, \theta) = r \cos \theta$ e $y(r, \theta) = r \sin \theta$, halle las derivadas parciales de la función compuesta $\mathcal{F}(r, \theta)$ usando la regla de la cadena. Determine explícitamente \mathcal{F} y verifique el resultado anterior.
- La temperatura en un punto (x, y) de una placa es $T(x, y)$, medida en grados Celsius. Un gusanito se arrastra de modo que su posición en el instante $t \geq 0$ (en segundos) está dada por $x(t) = \sqrt{1+t}$, $y(t) = 2 + \frac{1}{3}t$ (en centímetros). La expresión analítica de la función T no es conocida, pero se sabe que $T_x(2, 3) = 4$ y $T_y(2, 3) = 3$ (ambas cantidades en $^\circ\text{C}/\text{cm}$).
 - ¿A qué ritmo está subiendo la temperatura en la trayectoria del gusano, en el instante $t = 3$ s? ¿En qué unidades se expresa este resultado?
 - Si se desea hallar la razón de cambio (ascenso o descenso) de la temperatura 3 segundos más tarde, ¿le sirven los datos anteriores? ¿Por qué? ¿Qué información se necesita?
 - Pruebe que en el instante en que arranca su movimiento, el gusanito sentirá más calor con la condición de que la cantidad $3T_x + 2T_y$ evaluada en el punto inicial sea positiva.

3.6 Más sobre cambios de una función de varias variables

Consideremos $T(x, y) = \frac{280}{7 + x^2 + 2y^2}$ que representa la temperatura (en grados Celsius) en función de la posición (en kilómetros) en una región plana, tal que en el origen la temperatura es de 40°C y va disminuyendo al alejarse del $(0, 0)$. Supongamos que nos interesa analizar los *cambios de temperatura* de un punto a otro cercano. En cierto punto $P_0(x_0, y_0)$, la derivada parcial $\frac{\partial T}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{560x_0}{(7 + x_0^2 + 2y_0^2)^2}$ da la razón “instantánea” de cambio (en grados Celsius/km) de T en P_0 en la dirección del eje x positivo (hacia el Este); mientras que la derivada parcial $\frac{\partial T}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{1120y_0}{(7 + x_0^2 + 2y_0^2)^2}$ da la razón de cambio de T en P_0 en la dirección del eje y positivo (hacia el Norte). Para fijar ideas, parémonos en el punto $(3, 3)$, o sea a 3 km al E y 3 km al N del origen, donde $T(3, 3) = \frac{140}{17}^\circ\text{C}$; a partir de ese punto, la disminución de temperatura yendo hacia el E resulta de $\frac{60}{17}^\circ\text{C/km}$ mientras que yendo hacia el N es de $\frac{120}{17}^\circ\text{C/km}$. Teniendo en cuenta que las direcciones hacia el E y hacia el N son las que corresponden, respectivamente, a las que indican los versores \mathbf{i} y \mathbf{j} , nos planteamos cómo se podrá definir y calcular la razón de cambio de T en P_0 en una dirección arbitraria, por ejemplo en la dirección NE (indicada por el versor $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$), o SSO, o cualquier otra. Podemos, inclusive, preguntarnos en qué dirección habrá que moverse para que la temperatura baje lo más posible (ir a la zona más fresca). Estas inquietudes nos llevan al concepto de “derivada direccional” de una función de varias variables en un punto, en la dirección de cierto vector.

3.6.1 Derivadas direccionales

Sea $f(x, y)$ una función de 2 variables, y sea $P_0(x_0, y_0)$ un punto en el dominio de f . Supongamos que existen las derivadas parciales primeras de f en P_0 .

Por definición, $f_x(x_0, y_0)$ se obtiene a partir de un cociente incremental dado por la variación relativa de f entre $P_0(x_0, y_0)$ y $P_h(x_0 + h, y_0)$, para h suficientemente pequeño. Si ubicamos ambos puntos en el dominio de la función (que es una parte o todo el plano xy), podemos definir los vectores posición $\overrightarrow{OP_0} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$ y $\overrightarrow{OP_h} = (x_0 + h)\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$, entonces $\overrightarrow{OP_h} = \overrightarrow{OP_0} + h\mathbf{i}$. El cociente incremental que define a f_x en P_0 está dado por

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} &= \frac{f(\overrightarrow{OP_h}) - f(\overrightarrow{OP_0})}{h} \\ &= \frac{f(\overrightarrow{OP_0} + h\mathbf{i}) - f(\overrightarrow{OP_0})}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f_x(x_0, y_0) \equiv D_{\mathbf{i}}f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Si el límite existe, cuando h tiende a 0, obtenemos $f_x(x_0, y_0)$ como la razón de cambio instantánea de f en (x_0, y_0) en la dirección dada por el versor \mathbf{i} (que lo indicamos como subíndice).

Análogamente, $f_y(x_0, y_0)$ se obtiene a partir de la variación relativa de f entre $P_0(x_0, y_0)$ y $P_k(x_0, y_0 + k)$, para k suficientemente pequeño. Si ubicamos estos puntos en el plano, tenemos los vectores posición $\overrightarrow{OP_0} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$ y $\overrightarrow{OP_k} = x_0\mathbf{i} + (y_0 + k)\mathbf{j}$, entonces $\overrightarrow{OP_k} = \overrightarrow{OP_0} + k\mathbf{j}$. El cociente incremental que define a f_y en P_0 está dado por

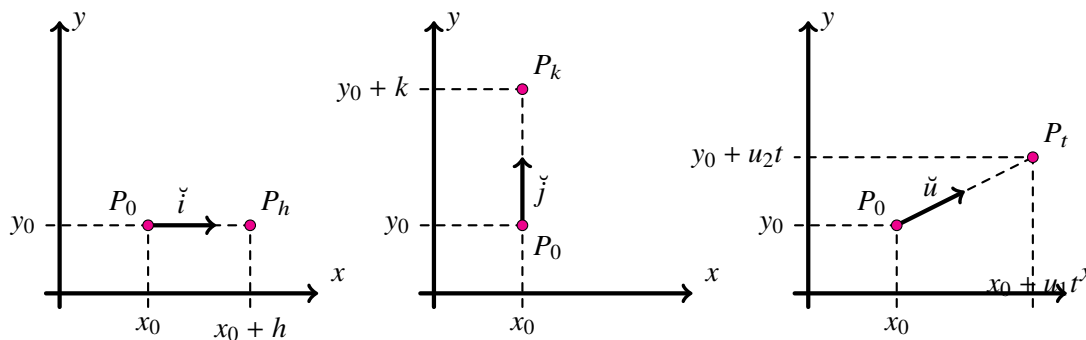
$$\begin{aligned} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} &= \frac{f(\overrightarrow{OP_k}) - f(\overrightarrow{OP_0})}{k} \\ &= \frac{f(\overrightarrow{OP_0} + k\mathbf{j}) - f(\overrightarrow{OP_0})}{k} \xrightarrow{k \rightarrow 0} f_y(x_0, y_0) \equiv D_{\mathbf{j}}f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Si el límite existe, cuando k tiende a 0, obtenemos $f_y(x_0, y_0)$ como la razón de cambio instantánea de f en (x_0, y_0) en la dirección dada por el versor \check{j} .

Los versores \check{i} y \check{j} señalan dos direcciones particulares (al Este y al Norte de P_0 , respectivamente, en el ejemplo dado antes). Pero nada impide moverse a partir de P_0 en cualquier otra dirección en el plano. Extendamos el mecanismo anterior y calculemos la razón de cambio de f en (x_0, y_0) , pero ahora en la dirección dada por un vector *cualquiera* (fijo). Consideremos la dirección determinada por cierto vector unitario $\check{u} = u_1\check{i} + u_2\check{j}$, con $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Al movernos por un camino recto desde el punto P_0 a otro punto en la dirección de \check{u} , se llega al punto $P_t(x_0 + t u_1, y_0 + t u_2)$ [recordar que $x(t) = x_0 + t u_1$, $y(t) = y_0 + t u_2$ son las ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por (x_0, y_0) y tiene como vector director a $\check{u} = u_1\check{i} + u_2\check{j}$. La variación relativa de f será

$$\frac{f(\overrightarrow{OP_t}) - f(\overrightarrow{OP_0})}{t} = \frac{f(\overrightarrow{OP_0} + t\check{u}) - f(\overrightarrow{OP_0})}{t} = \frac{f(x_0 + t u_1, y_0 + t u_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Esto también da lugar, en el límite de t muy pequeño, a una derivada de f en (x_0, y_0) pero no en la dirección de los ejes x ó y positivos, sino precisamente en la dirección del versor \check{u} dado.



Definición — Derivada direccional. Sea f una función de 2 variables, y sea $(x_0, y_0) \in \text{Dom}(f)$. La derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección del versor $\check{u} = u_1\check{i} + u_2\check{j}$ se define como

$$D_{\check{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t u_1, y_0 + t u_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

si este límite existe.

- C** La derivada direccional de una función en un punto dado en la dirección de un versor dado, es un escalar. Puede ser un número positivo o negativo, en este caso da una medida de cuánto aumenta o disminuye, respectivamente, la función al apartarse de ese punto en esa dirección; o puede ser cero, lo que indica que la función no cambia en esa dirección. Esto último ocurrirá en la dirección de la curva de nivel que pasa por el punto; discuta esta afirmación.

A partir de la definición dada, ¿qué obtiene si toma $\check{u} = +\check{i}$? ¿Y si $\check{u} = +\check{j}$? ¿Qué significa $D_{-\check{i}}f(x_0, y_0)$?

Interpretación geométrica de la derivada direccional

Una forma de interpretar la cantidad $D_{\check{u}}f(x_0, y_0)$ se obtiene siguiendo un razonamiento similar al de la Sección 3.3, cuando introdujimos las derivadas parciales.



En el siguiente recurso pueden visualizarse cómo varía en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en la dirección de un versor \check{u} en cada dirección que se desee: <https://ggbm.at/jMayUqEn>

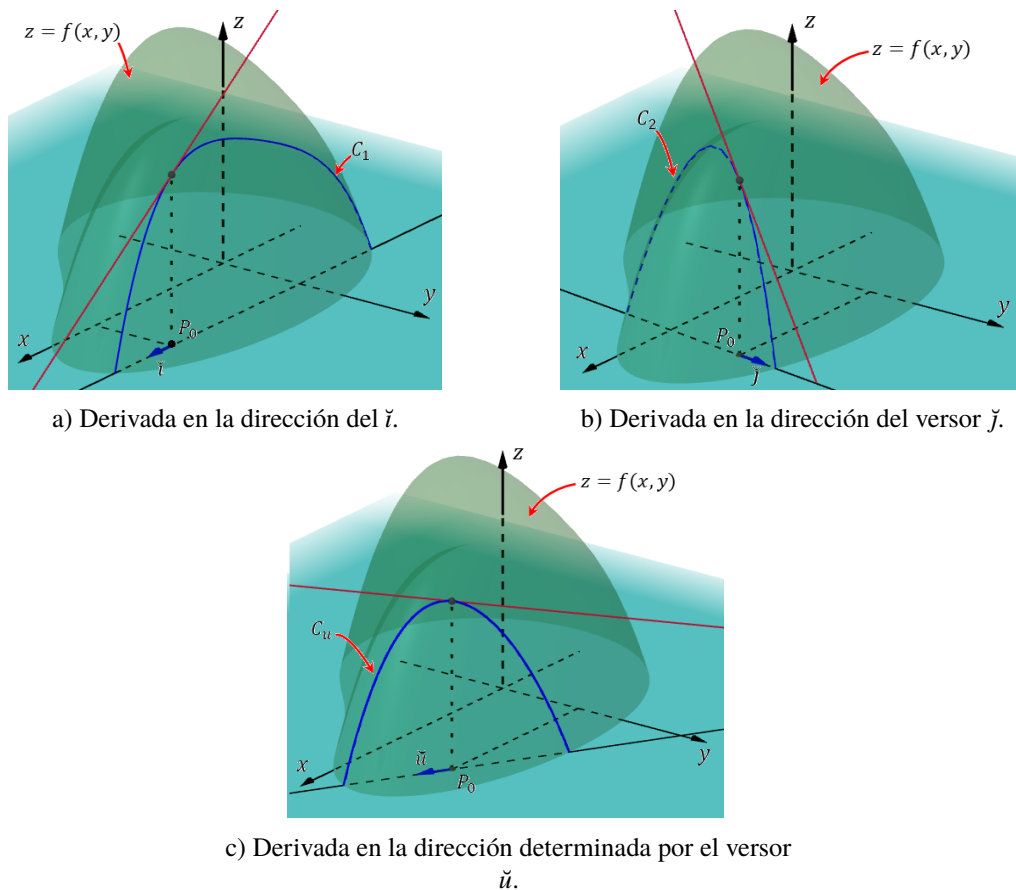


Figura 3.6.1: Interpretación de derivadas parciales y derivada direccional.

■ **Ejemplo 3.6.1** Sea $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$. Hallar en cada caso (si existe) la derivada direccional de f en el punto indicado, en la dirección dada:

- En el punto $(0, 0)$ en las direcciones de los versores básicos.
 - En el punto $(0, 0)$ en la dirección del versor $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$.
 - En el punto $(2, 0)$ en la dirección del vector $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. ¿Y en otras direcciones?
- a) De acuerdo a la definición, se tiene en el origen en la dirección del versor \vec{i} :

$$\begin{aligned} D_{\vec{i}}f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + 1h, 0 + 0h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 = f_x(0, 0). \end{aligned}$$

Por otro lado, resulta en el origen en la dirección del versor \vec{j} :

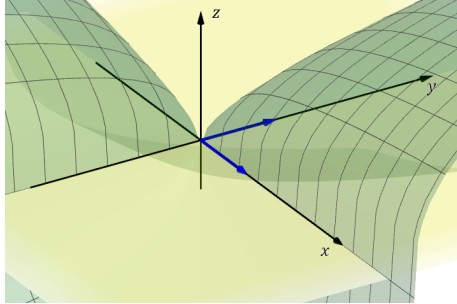
$$\begin{aligned} D_{\vec{j}}f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + 0h, 0 + 1h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 = f_y(0, 0). \end{aligned}$$

- b) De acuerdo a la definición, la derivada direccional de f en el origen en la dirección del

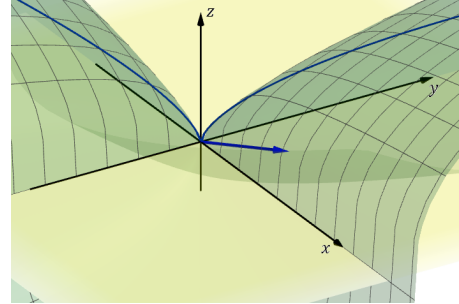
versor $\check{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\check{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\check{j}$ debe ser el límite, si existe, del siguiente cociente incremental:

$$\frac{f\left(0 + \frac{1}{\sqrt{2}}h, 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}h\right) - f(0, 0)}{h} = \frac{f\left(\frac{h}{\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{2}}\right) - f(0, 0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{\frac{h^2}{2}}}{h} = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{h}},$$

pero este cociente no tiene límite finito cuando $h \rightarrow 0$. Luego, la función $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ no admite derivada direccional en $(0, 0)$ en la dirección $\frac{\check{i} + \check{j}}{\sqrt{2}}$.



a) Las rectas tangentes en $(0, 0, 0)$ en las direcciones \check{i} y \check{j} son horizontales. Las derivadas direccionales en $(0, 0)$ dan 0.



b) La recta tangente en $(0, 0, 0)$ la dirección \check{u} es vertical. La derivada direccional en $(0, 0)$ no existe.

- c) En este caso, debemos tener el cuidado de normalizar primero el vector \vec{v} , ya que la definición de derivada direccional está dada para un vector unitario. La normalización de \vec{v} da $\check{v} = \frac{3}{5}\check{i} + \frac{4}{5}\check{j}$, luego $D_{\check{v}}f(2, 0)$, si existe, debe ser el límite cuando $h \rightarrow 0$ de:

$$\begin{aligned} \frac{f\left(2 + \frac{3}{5}h, 0 + \frac{4}{5}h\right) - f(2, 0)}{h} &= \frac{f\left(2 + \frac{3}{5}h, \frac{4}{5}h\right) - f(2, 0)}{h} \\ &= \frac{\sqrt[3]{\left(2 + \frac{3h}{5}\right)\frac{4h}{5}}}{h} = \sqrt[3]{\frac{8}{5h^2} + \frac{12}{25h}} \end{aligned}$$

que no existe. ■

■ **Ejemplo 3.6.2** Dada la función $f(x, y) = x + 2y$, indicar en qué dirección o direcciones se verifica que la derivada direccional de f en $(3, 4)$ vale 2. ¿Y en qué dirección(es) vale 6?

En este ejemplo, tenemos la función y el punto donde hallar la derivada direccional, pero no está especificada la dirección. Esto lo debemos determinar con el dato de que el resultado es 2. Planteamos entonces para un vector unitario $\check{u} = u_1\check{i} + u_2\check{j}$, con $u_1^2 + u_2^2 = 1$:

$$\begin{aligned} D_{\check{u}}f(3, 4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3 + hu_1, 4 + hu_2) - f(3, 4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(3 + hu_1) + 2(4 + hu_2)] - 11}{h} \\ &= u_1 + 2u_2 = 2. \end{aligned}$$

Luego debemos hallar la o las soluciones, si existen, del sistema de ecuaciones:

$$u_1 + 2u_2 = 2, \quad u_1^2 + u_2^2 = 1.$$

Existen dos soluciones: \check{u} es el versor \check{j} ó es el vector unitario $\frac{4}{5}\check{i} + \frac{3}{5}\check{j}$.

Resolviendo el ejercicio para el otro dato, que la derivada direccional valga 6, se encuentra que no hay solución. ¿Qué significa esto? Nos está diciendo que no hay ninguna dirección (ningún vector unitario en todo V_2) para la cual la derivada direccional de f en el punto $(3, 4)$ alcance el valor 6. Veremos, de hecho, que para funciones diferenciables las derivadas direccionales tienen un valor máximo (y un valor mínimo también, en el sentido opuesto al del máximo). Mostraremos que el valor es $\sqrt{f_x(3, 4)^2 + f_y(3, 4)^2} = \sqrt{5}$, y como 6 supera este valor, no hay solución. ■

Podemos preguntarnos si se puede (o no) establecer una vinculación entre las dos derivadas parciales y las (infinitas) derivadas direccionales de una función en un punto dado. Se puede, de hecho, siempre y cuando la función sea diferenciable en ese punto, y la relación está dada por el siguiente teorema, que nos provee una útil regla de derivación direccional (que normalmente es más fácil de utilizar que derivar por definición). La demostración del teorema es sencilla, y hace uso de la regla de la cadena.

Teorema 3.6.1 Si $f(x, y)$ es diferenciable en $(x_0, y_0) \in \text{Dom}(f)$, entonces:

- i) f admite derivada direccional en la dirección de cualquier vector en V_2 ;
- ii) la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección del versor $\check{u} = u_1\check{i} + u_2\check{j}$ vale

$$D_{\check{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$$

Demostración Para (x_0, y_0) y (u_1, u_2) dados, la expresión $f(x_0 + t u_1, y_0 + t u_2)$ resulta una función de t , que llamaremos $F(t)$. En particular para $t = 0$ se tiene $F(0) = f(x_0, y_0)$. Usando la definición de derivada direccional resulta entonces

$$D_{\check{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t u_1, y_0 + t u_2) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = F'(0).$$

Por otro lado, notamos que $F(t)$ es la función compuesta entre la función diferenciable $f(x, y)$ y las funciones lineales $x(t) = x_0 + t u_1$, $y(t) = y_0 + t u_2$:

$$F(t) = f(x(t), y(t)) : \quad f \begin{array}{c} \langle x \\ \rangle \\ y \end{array} t$$

Calculamos su derivada mediante la regla de la cadena, y luego la evaluamos en $t = 0$:

$$\begin{aligned} F'(t) &= f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) \\ &= f_x(x_0 + t u_1, y_0 + t u_2)u_1 + f_y(x_0 + t u_1, y_0 + t u_2)u_2. \end{aligned}$$

Obtenemos $F'(0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$, lo que completa la demostración.

Este teorema da una regla útil, si la función es diferenciable, para calcular derivadas direcciones en toda dirección. Por el contrario, la negación lógica (contrarrecíproca) del teorema permite afirmar que: “si (al menos) una derivada direccional no existe, entonces la función no es diferenciable”.

En el Ejemplo 3.6.1 vimos que la función $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ tiene ambas derivadas parciales en $(0, 0)$, pero la derivada direccional en $(0, 0)$ en la dirección $\frac{\check{i} + \check{j}}{\sqrt{2}}$ no existe. Por lo tanto f no es diferenciable en el origen.

Para una función escalar de 3 variables, la derivada direccional se define de manera similar al caso de 2 variables; también, para funciones diferenciables de 3 variables, es válido un teorema análogo al anterior. Veamos un ejemplo.

- **Ejemplo 3.6.3** Dada la función $f(x, y, z) = \frac{x}{y+z}$, hallar la derivada direccional de f en el punto $(4, 1, 1)$ en la dirección del vector $\vec{U} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

Como la función es diferenciable en el punto $(4, 1, 1)$ (por ser una función racional cuyo dominio comprende al punto), podemos asegurar por teorema que la derivada direccional en $(4, 1, 1)$ existe para cualquier dirección. En particular para la dirección \vec{U} se tiene

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(4, 1, 1) &= f_x(4, 1, 1)\frac{2}{|\vec{U}|} + f_y(4, 1, 1)\frac{1}{|\vec{U}|} + f_z(4, 1, 1)\frac{3}{|\vec{U}|} \\ &= \frac{\frac{1}{2}2 + (-1)1 + (-1)3}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = -\frac{3}{\sqrt{14}} \end{aligned}$$

(donde $\vec{u} = \frac{\vec{U}}{|\vec{U}|}$, pues se deben usar las componentes del vector normalizado). ■

3.6.2 Vector gradiente

La expresión dada en el teorema anterior puede escribirse en forma compacta como un producto escalar: entre el versor que indica la dirección de derivación, y el vector cuyas componentes son las derivadas parciales de f evaluadas en el punto. Este vector es muy útil y se conoce como *vector gradiente de f en (x_0, y_0)* . Se denota con el símbolo “nabla” o también como “grad”:

$$\vec{\nabla}f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) = f_x(x_0, y_0)\vec{i} + f_y(x_0, y_0)\vec{j}$$

Notar que si dejamos que el par (x_0, y_0) designe cualquier punto (x, y) del dominio de f donde la función admita derivadas parciales, lo que se tiene es una relación que a cada par ordenado de \mathbb{R}^2 le asigna un (único) vector de V_2 , o sea $\text{grad} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V_2$. Este es un nuevo tipo de función llamado *campo vectorial*. Estudiaremos en detalle los campos vectoriales en el Capítulo 6.

- **Ejemplo 3.6.4** El gradiente de $f(x, y) = \ln(3x - y)$ en un punto (x, y) del dominio de f es el “campo vectorial” $\vec{\nabla}f(x, y) = \left(\frac{3}{3x - y}, -\frac{1}{3x - y} \right)$. En particular, $\vec{\nabla}f(1, 2) = (3, -1) = 3\vec{i} - \vec{j}$. ■

Para funciones de 3 variables, se tiene

$$\vec{\nabla}f(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)) = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}$$

definido para una terna en \mathbb{R}^3 y da como resultado un vector de V_3 , si todas las derivadas parciales existen.

- **Ejemplo 3.6.5** Dada la función $f(x, y, z) = x \sinh(y^2z)$, se tiene $\vec{\nabla}f(x, y, z) = \sinh(y^2z)\vec{i} + 2xy z \cosh(y^2z)\vec{j} + xy^2 \cosh(y^2z)\vec{k}$ para cualquier terna $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. ■

Volviendo al Teorema 3.6.1, podemos reescribirlo así

Teorema 3.6.2 Si $f(x, y)$ es diferenciable en $(x_0, y_0) \in \text{Dom}(f)$, entonces $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \vec{\nabla}f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}$, para cualquier \vec{u} de V_2 .

Esta relación nos permite expresar fácilmente la derivada direccional en la dirección de un vector \vec{U} (no nulo) que no está normalizado. Escribiendo $\vec{U} = |\vec{U}| \vec{u}$, si f es diferenciable se tiene

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \vec{\nabla}f(x_0, y_0) \cdot \frac{\vec{U}}{|\vec{U}|}.$$

Observamos que, a partir de un punto dado, la derivada direccional tomará distintos valores dependiendo de la dirección que se elija. Podemos preguntarnos por ejemplo en qué direcciones a partir de ese punto aumenta la función (lo que corresponde a derivada direccional positiva) y, en particular, cuánto más aumenta la función o, en otros términos, si la razón de cambio puede ser arbitrariamente grande. Para funciones diferenciables, a partir del Teorema 3.6.2 podemos deducir que la derivada direccional de f en (x_0, y_0) tiene un valor máximo finito, si recordamos una de las propiedades vistas en el Capítulo 1 sobre el producto escalar entre vectores: $\vec{v} \cdot \vec{u}$ no puede ser mayor que el producto de sus módulos, $|\vec{v}| |\vec{u}|$.

En nuestro caso tenemos $\vec{v} = \vec{\nabla}f(x_0, y_0)$ que es un vector fijo, mientras que \vec{u} es unitario, de donde obtenemos que *la derivada direccional no supera el valor del módulo del gradiente en el punto*.

De manera análoga puede justificarse que la derivada direccional toma un valor mínimo, que vale menos el módulo del gradiente.

En el Capítulo 1 también discutimos cuál es la orientación relativa entre dos vectores para lograr que su producto escalar sea máximo (o mínimo): deben ser vectores colineales y de igual sentido (o de sentidos opuestos, respectivamente). Resumimos este resultado en la siguiente interesante propiedad:

3.6.3 Dirección de máximo crecimiento

Supongamos que $f(x, y)$ es una función diferenciable en (x_0, y_0) tal que $\vec{\nabla}f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$. La derivada direccional de f en el punto es máxima (*máximo crecimiento*) en la dirección del gradiente,

esto es para $\vec{u}_M = \frac{\vec{\nabla}f(x_0, y_0)}{|\vec{\nabla}f(x_0, y_0)|}$; y además, el valor de dicha derivada direccional máxima es

$|\vec{\nabla}f(x_0, y_0)|$.

Por otro lado, el *máximo decrecimiento* de f en (x_0, y_0) ocurre en la dirección opuesta al gradiente, esto es para $\vec{u}_m = -\frac{\vec{\nabla}f(x_0, y_0)}{|\vec{\nabla}f(x_0, y_0)|}$, y el valor es $-|\vec{\nabla}f(x_0, y_0)|$.

Demostración Sea $f(x, y)$ diferenciable en (x_0, y_0) . Luego para $\vec{u} \in V_2$, aplicando el teorema da $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \vec{\nabla}f(x_0, y_0) \cdot \vec{u} = |\vec{\nabla}f(x_0, y_0)| |\vec{u}| \cos \alpha = |\vec{\nabla}f(x_0, y_0)| \cos \alpha$, siendo α el ángulo entre el vector gradiente en el punto y el vector \vec{u} de módulo 1. Usando que $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, se tiene

$$-|\vec{\nabla}f(x_0, y_0)| \leq |\vec{\nabla}f(x_0, y_0)| \cos \alpha \leq |\vec{\nabla}f(x_0, y_0)|$$

de donde

$$-|\vec{\nabla}f(x_0, y_0)| \leq D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) \leq |\vec{\nabla}f(x_0, y_0)|$$

El menor valor ocurre para \vec{u} en la dirección de $-\vec{\nabla}f(x_0, y_0)$, mientras que el mayor valor se da para \vec{u} en dirección de $+\vec{\nabla}f(x_0, y_0)$.

3.6.4 Derivada direccional y curvas de nivel

Existe una relación entre la dirección de máximo crecimiento y las curvas de nivel. Recordemos que una forma de representar gráficamente una función de 2 variables es mediante un mapa de contornos, que consiste en un conjunto de curvas de nivel, donde cada curva une puntos del plano

con igual valor de función. Sea C_k la curva de nivel k , esto es tal que $f(x, y) = k$ donde k es algún valor de la imagen de la función.

Consideremos la curva de nivel que pasa por el punto (x_0, y_0) , en este caso entonces $k = f(x_0, y_0)$. Pensemos en la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en una dirección dada cualquiera. Claramente si la dirección es la de la tangente a la curva de nivel, la derivada direccional se anula (porque la función no cambia a lo largo de una curva de nivel), pero en cualquier otra dirección, salvo que se trate de una función constante, cambiará: f aumenta o disminuye. Se prueba que hacia donde más aumenta es en la dirección perpendicular a la curva de nivel.

Proposición 3.6.3 El vector gradiente de una función en un punto, $\vec{\nabla}f(x_0, y_0)$, es un vector perpendicular a la curva de nivel de f que pasa por el punto (x_0, y_0) .

Demostración Se parametriza C_k por medio de $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$, tal que $\vec{r}(t_0) = (x_0, y_0)$. Sobre C_k se tiene $x = x(t)$ e $y = y(t)$, entonces vale $f(x(t), y(t)) = k$. El lado izquierdo puede pensarse como una función compuesta (caso 2×1), luego $\frac{df}{dt} = f_x x' + f_y y'$. Ahora evaluamos esta expresión para $t = t_0$, que corresponde al punto (x_0, y_0) sobre la curva de nivel C_k . La derivada del lado izquierdo será cero (sobre la curva de nivel la función NO cambia, vale siempre k), mientras que el lado derecho será el producto escalar entre $\vec{\nabla}f(x_0, y_0)$ y el vector $\vec{r}'(t_0)$ que es tangente a C_k en (x_0, y_0) , luego

$$0 = \vec{\nabla}f(x_0, y_0) \cdot \vec{r}'(t_0)$$

Esto prueba que en cada punto el vector gradiente es perpendicular a la curva de nivel.



En el siguiente recurso se presentan distintos aspectos relacionados con la derivada direccional de funciones de 2 variables: curvas de nivel, vector gradiente, máximo crecimiento/decrecimiento.

<https://ggbm.at/MvJAPFqV>

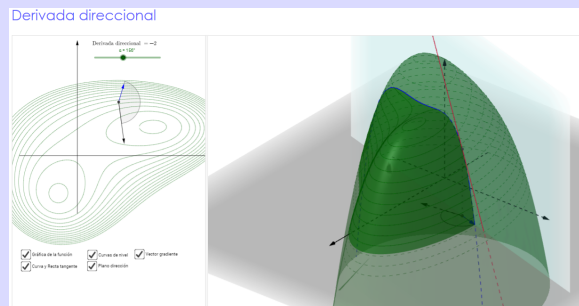


Figura 3.6.3: Derivada direccional.

■ **Ejemplo 3.6.6** Considerar la función $f(x, y) = xy$. Dada la recta L de ecuación $x + y = 2$, encontrar la curva de nivel de f que toca a la recta en forma tangente, e indicar el punto de tangencia. Graficar.

Las curvas de nivel de f tienen ecuación $xy = k$ con $k \in \mathbb{R}$, luego si $k = 0$ se tiene un par de rectas y si $k \neq 0$ se tienen hipérbolas. Efectivamente, C_0 es el conjunto de puntos tales que $x = 0$ (eje y) ó $y = 0$ (eje x), mientras que $C_{k \neq 0}$ tiene ecuación $y = \frac{k}{x}$. Claramente, la recta L no es tangente a C_0 en ningún punto del plano, por lo que descartamos

la curva de nivel $k = 0$. Entonces el problema se reduce a encontrar cuál (o cuáles) de las hipérbolas de la forma $y = \frac{k}{x}$ (con $k \neq 0$) es tangente a la recta dada, en algún punto del primero, segundo o cuarto cuadrante, que es por donde pasa la recta. Un gráfico de la situación nos da la pauta de que el punto de tangencia debe estar en el primer cuadrante (grafique). Esto se traduce en que el valor de k buscado es un número positivo.

Como la recta dada debe ser tangente a la curva de nivel, un vector director de la recta será perpendicular al vector gradiente de la función en el punto de tangencia. Buscamos (x_0, y_0) tal que

$$x_0 + y_0 = 2 \quad \text{y} \quad \vec{\nabla}f(x_0, y_0) \cdot \vec{v} = 0$$

donde $\vec{\nabla}f(x_0, y_0) = y_0 \vec{i} + x_0 \vec{j}$ y tomamos por ejemplo $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$. Luego la segunda ecuación queda $-y_0 + x_0 = 0$, de donde $x_0 = y_0$. El problema tiene solución, única: $x_0 = y_0 = 1$.

Entonces el punto de tangencia pedido es $(1, 1)$ y la curva de nivel es C_1 dada por $y = \frac{1}{x}$. ■

■ **Ejemplo 3.6.7** Para el ejemplo considerado al comienzo de la Sección 3.6, graficar algunas curvas de nivel, en particular la que pasa por $(3, 3)$. a) Dar $\vec{\nabla}T(3, 3)$ e indicarlo sobre la figura, verificando que es perpendicular en el punto a la curva de nivel correspondiente (¿de qué nivel?). b) Discutir qué ocurre en $(0, 0)$.

a) Las curvas de nivel C_k están definidas para valores de $k \in \text{Im}(f) = (0, 40]$, y tienen la forma de elipses concéntricas, con k disminuyendo al alejarse del origen. Ver Figura 3.6.4.

Vimos que $T(3, 3) = \frac{140}{17}^\circ\text{C}$, luego la curva de nivel que pasa por $(3, 3)$ es

$$C_{140/17} = \left\{ (x, y) : \frac{280}{7 + x^2 + 2y^2} = \frac{140}{17} \right\} = \left\{ (x, y) : x^2 + 2y^2 = 27 \right\}.$$

El gradiente de T en $(3, 3)$ es el vector $\vec{\nabla}T(3, 3) = \left(-\frac{60}{17}, -\frac{120}{17} \right)$ (en $^\circ\text{C}/\text{km}$).

Para verificar la perpendicularidad, necesitamos un vector que indique la dirección de la curva de nivel. En el Capítulo 2 aprendimos a hacer esto: parametrizando la curva mediante una función vectorial $\vec{r}(t)$ y evaluando $\vec{r}'(t)$ para el valor de t que corresponde al punto.

En este ejemplo, dado que $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{27/2} = 1$ que representa una elipse de semiejes $3\sqrt{3}$ y $3\sqrt{\frac{3}{2}}$, podemos tomar

$$\vec{r}(t) = \left(3\sqrt{3} \cos t, 3\sqrt{\frac{3}{2}} \sin t \right), \quad \text{con } t \in [0, 2\pi),$$

que pasa por el punto $(3, 3)$ cuando $t = t_0$ es tal que $\cos t_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\sin t_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Luego $\vec{r}'(t) = \left(-3\sqrt{3} \sin t, 3\sqrt{\frac{3}{2}} \cos t \right)$, que, evaluado en t_0 , da $\vec{r}'(t_0) = \left(-3\sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}} \right)$.

Se verifica efectivamente que

$$\vec{\nabla}T(3, 3) \cdot \vec{r}'(t_0) = 0,$$

esto es que ambos vectores son perpendiculares en el punto $(3, 3)$.

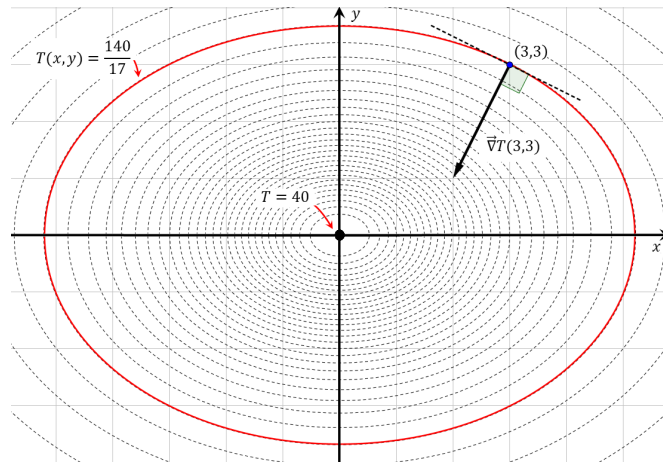


Figura 3.6.4: Mapa de contornos de la función $T(x, y) = 280/(7 + x^2 + 2y^2)$ se observa que $\vec{\nabla}T(3, 3)$ es perpendicular a la curva de nivel de T que pasa por $(3, 3)$.

- b) $T(0, 0) = 40^\circ\text{C}$ y $\vec{\nabla}T(0, 0) = \vec{0}$. La curva de nivel 40 se reduce a un solo punto, el origen. A partir del mapa de contornos o de la superficie gráfica de la función (hágala), observamos que en el origen la función T toma el mayor valor posible. Es el punto más caliente de la región. ■

En la Figura 3.6.4 podemos ver el mapa de contornos de la función $T(x, y) = 280/(7 + x^2 + 2y^2)$ junto con una gráfica de la misma. Podemos observar que, como mencionamos en el Ejemplo 3.6.7, el $\vec{\nabla}T(3, 3)$ es ortogonal a la curva de nivel de T que pasa por $(3, 3)$ pero además sabemos que la dirección de $\vec{\nabla}T(3, 3)$ es una dirección de máximo crecimiento de la función en el punto. Observar en el gráfico que efectivamente la dirección de $\vec{\nabla}T(3, 3)$ es una dirección en la cual, a partir de $(3, 3)$, la función temperatura aumenta más rápidamente.

3.6.5 Derivada direccional y superficies de nivel

Supongamos que $f(x, y, z)$ es una función de tres variables diferenciable y sea (x_0, y_0, z_0) un punto del dominio de f . Supongamos además que $f(x_0, y_0, z_0) = k$ y sea $S_k = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = k\}$ la superficie de nivel de f que pasa por (x_0, y_0, z_0) . De forma análoga a lo que sucede para funciones de dos variables, se puede ver que si \vec{v} es un vector tangente en $t = t_0$ a una curva paramétrica $\vec{r}(t)$ contenida en la superficie S_k tal que $\vec{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$, entonces $\vec{\nabla}f(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{v} = 0$.

Esto permite definir el *plano tangente a la superficie de nivel en un punto* (x_0, y_0, z_0) como el plano de ecuación

$$\vec{\nabla}f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

o equivalentemente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Se puede ver que si $f(x, y, z)$ es diferenciable entonces:

- la derivada direccional de f en un punto (x_0, y_0, z_0) en una dirección sobre el plano tangente a la superficie de nivel que pasa por dicho punto, es cero (pues la función no cambia sobre la superficie de nivel);
- si $\vec{\nabla}f(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$, la derivada direccional de f en el punto (x_0, y_0, z_0) en una dirección perpendicular al plano tangente a la superficie de nivel que pasa por el punto, es máxima (o mínima). El máximo crecimiento de f corresponde a la dirección en el sentido del gradiente de f en el punto.

- **Ejemplo 3.6.8** Determinar una ecuación para el plano tangente al elipsoide $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$ en el punto $(-2, 1, -3)$.

Una manera de resolver este problema, es pensar que la superficie del elipsoide es una superficie de nivel de una función de 3 variables. Por ejemplo, si definimos $f(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} - 3$, resulta que su superficie de nivel 0, S_0 , es justamente el elipsoide dado. Verificamos que el punto $(-2, 1, 3)$ pertenece a la superficie S_0 pues $f(-2, 1, 3) = 0$, y usamos la propiedad de que el gradiente de f en $(-2, 1, -3)$ es perpendicular a S_0 . Tenemos $\vec{\nabla} f(-2, 1, -3) = \left(-1, 2, -\frac{2}{3}\right)$, que tomaremos como vector normal al plano buscado. Luego, una ecuación para el plano tangente es

$$-1(x + 2) + 2(y - 1) - \frac{2}{3}(z + 3) = 0.$$

■

Veamos cómo obtener el plano tangente a la gráfica de una función de 2 variables, usando la propiedad del gradiente de una función de 3 variables.

Sea $f(x, y)$ una función de 2 variables cuya gráfica es la superficie S dada por $z = f(x, y)$, y sea $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ un punto de S . Se puede pensar a S como una superficie de nivel de una función de 3 variables. Por ejemplo, si definimos

$$F(x, y, z) = z - f(x, y)$$

resulta que la superficie de nivel 0, S_0 , de la función $F(x, y, z)$ es justamente la superficie S que es gráfica de la función $f(x, y)$. El punto P_0 pertenece a S por definición, y también es inmediato ver que pertenece a S_0 , con $z_0 = f(x_0, y_0)$. La ventaja de haber definido la función auxiliar de 3 variables, es que su gradiente en P_0 nos provee de un vector normal al plano tangente a la superficie (de nivel). Tenemos

$$\vec{\nabla} F(x_0, y_0, z_0) = (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), +1)$$

de modo que el plano buscado tiene ecuación

$$-f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + 1(z - z_0) = 0,$$

que ya conocíamos de la Sección 3.4.2 de este Capítulo 3.

3.6.6 Derivación parcial implícita

Estudiaremos por último en este capítulo cómo hallar la derivada de una función cuando está dada en forma implícita. En Análisis Matemático I se trabajaron ejercicios de derivación implícita como el siguiente:

Encontrar $y'(x)$ sabiendo que $\cos y = 3x^2 + xy$.

Vemos que no es posible despejar explícitamente y en función de x a partir de esta ecuación, pero se puede suponer que (al menos en una región del plano xy) esa ecuación permite definir a y como una función “implícita” de x ; luego se tendrá $\cos y(x) = 3x^2 + xy(x)$. Derivando cada término de esta expresión respecto de x resulta una ecuación que es lineal en $y'(x)$, entonces se puede despejar y' para obtener el resultado deseado, aún sin conocer la forma explícita de y . Efectivamente derivando se obtiene $-\sin[y(x)]y'(x) = 6x + [y(x) + xy'(x)]$, de donde despejando se tiene $y'(x) = -\frac{6x + y(x)}{\sin y(x) + x}$, salvo que el denominador se anule.

Veamos cómo podemos resolver el ejemplo anterior utilizando una función escalar de 2 variables y la regla de la cadena. Si definimos

$$F(x, y) = \cos y - 3x^2 - xy$$

resulta que la curva de nivel 0, C_0 de la función $F(x, y)$ satisface justamente la ecuación dada: $\cos y = 3x^2 + xy$.

Las variables x e y que están sobre la curva de nivel C_0 están vinculadas, y podemos suponer, como antes, que y es una función (implícita) de x . Entonces, suponiendo que $y = y(x)$ sobre C_0 , se tiene que $F(x, y(x))$, que es ahora una función de 1 variable, se anula: $F(x, y(x)) = 0$. El lado izquierdo puede pensarse como una función compuesta (caso 2×1) y podemos derivar usando la regla de la cadena. Diagramáticamente tenemos

$$G(x) : F \begin{matrix} \swarrow & x & \searrow \\ & & \\ & y & \end{matrix} \begin{matrix} \swarrow & & \searrow \\ & x & \end{matrix}$$

luego, si las funciones involucradas $F(x, y)$ e $y(x)$ son diferenciables, se tiene

$$\frac{dG}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

o sea, $G'(x) = F_x + F_y y'(x)$.

Usamos ahora el hecho de que los pares $(x, y(x))$ están sobre una curva de nivel de $F(x, y)$, lo cual implica que la función compuesta $G(x)$ es constante, de hecho vale 0. Y si G es constante, su derivada es nula. Luego tenemos

$$0 = F_x + F_y y'(x)$$

de donde se puede despejar finalmente $y'(x) = \frac{-F_y}{F_x}$, aún sin conocer explícitamente $y(x)$.

Para el ejemplo dado, la última ecuación resulta $(-6x - y) + (-\sin y - x)y'(x) = 0$ y se obtiene el resultado conocido para $y'(x)$, salvo que $\sin y + x$ se anule.

El siguiente teorema resume la situación planteada y las hipótesis para su utilización:

Teorema 3.6.4 – Teorema de la función implícita ($n = 2$). Sea $F : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, con $(x_0, y_0) \in D$ tal que $F(x_0, y_0) = 0$. Si:

- i) $F(x, y)$ está definida en un disco abierto que contiene a (x_0, y_0) ,
- ii) F_x y F_y son continuas en el disco,
- iii) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$,

entonces:

La ecuación $F(x, y) = 0$ define implícitamente a y como una función derivable de x cerca del punto (x_0, y_0) , con

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}.$$

Imaginemos ahora otra situación: dadas las variables x, y, z se tiene un vínculo entre ellas de la forma $xyz = \cos(x + y + z)$. Siguiendo la misma idea que antes, podríamos definir la función de 3 variables $F(x, y, z) = xyz - \cos(x + y + z)$ de tal manera que la ecuación dada corresponde a la superficie de nivel 0, S_0 , de F . Suponiendo que sobre S_0 se puede definir a z (implícitamente) en función de x e y , la pregunta es cómo obtener la variación de z respecto de sus 2 variables. Usamos nuevamente la idea de función compuesta (caso 3×2) y la regla de la cadena, para $G(x, y) = F(x, y, z(x, y))$. Armar el diagrama correspondiente y calcular las derivadas parciales de G respecto de sus dos variables independientes, x e y . Luego, recordando que los puntos están sobre una superficie de nivel de F , resulta que G es constante y sus derivadas parciales se anulan, de donde se obtendrán expresiones para z_x y z_y . El siguiente teorema resume la situación planteada y las hipótesis para su utilización:

Teorema 3.6.5 – Teorema de la función implícita ($n = 3$). Sea $F : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, con $(x_0, y_0, z_0) \in E$ tal que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Si:

- i) $F(x, y, z)$ está definida en una esfera abierta que contiene a (x_0, y_0, z_0) ,
- ii) F_x, F_y y F_z son continuas en la esfera,
- iii) $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$,

entonces:

La ecuación $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente a z como una función diferenciable de x e y cerca del punto (x_0, y_0, z_0) , con

$$\begin{cases} z_x = -\frac{F_x(x, y, z(x, y))}{F_z(x, y, z(x, y))} \\ z_y = -\frac{F_y(x, y, z(x, y))}{F_z(x, y, z(x, y))}. \end{cases}$$

3.6.7 Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes funciones, halle la derivada direccional en el punto P en la dirección que va de P a Q . Justifique el uso de la regla de derivación (Teorema 3.6.1) en cada caso.
 - a) $f(x, y) = \cos(x + y)$, $P(0, \pi)$, $Q(\frac{\pi}{2}, 0)$
 - b) $g(x, y, z) = xye^z$, $P(2, 4, 0)$, $Q(0, 0, 0)$
2. Encuentre la o las direcciones en las que la derivada direccional de $f(x, y) = x^2 + \sin(xy)$ en el punto $(1, 0)$ tiene el valor 1.
3. Halle la dirección de máximo crecimiento de la función $f(x, y) = \ln(3x - y)$ en el punto $(1, 2)$. ¿Cuánto vale la máxima razón de cambio de f en dicho punto? Explique por qué $D_{\vec{u}}f(1, 2)$ no puede superar dicho valor para ningún versor \vec{u} de V_2 .
4. Determine la máxima razón de cambio de $g(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$ en el punto $(4, 2, 1)$. ¿Es esto una magnitud escalar o vectorial?
5. Se representa la superficie de un lago por una región en el plano xy . Su profundidad (en metros) en el punto $P(x, y)$ está dada por la función $h(x, y) = 400 - 3x^2y^2$. Si un bañista está en el punto $P_0(1, -2)$, determine en qué dirección debe nadar para que la profundidad aumente lo más rápido posible. Si por el contrario, el bañista se encuentra en una situación de riesgo, ¿hacia dónde debe nadar para llegar lo más rápido posible a un lugar menos profundo?
6. Suponiendo que la ecuación $x^2 - xy + y^3 = 8$ define a y implícitamente como función de x , halle $\frac{dy}{dx}$. ¿En qué puntos del plano no es posible aplicar el teorema?
7. Halle $\vec{\nabla}_z(x, y)$ donde se supone que z puede definirse implícitamente a partir de la ecuación $xe^y + yz + ze^x = 0$. ¿Qué valor toma z cuando $(x, y) = (-1, 0)$? Evalúe $\vec{\nabla}_z(x, y)$ cuando $(x, y) = (-1, 0)$.
8. Dada la función $F(x, y, z) = xz^2 - y \sin z$, escribir la ecuación de la superficie de nivel de F que pasa por el punto $(0, 1, 2\pi)$. Verifique que en un entorno del punto dicha ecuación permite definir implícitamente a z como una función diferenciable de x e y . Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, y evalúelas en el punto.
9. Dada la ecuación $x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y + z + 2 = 0$:
 - a) verifique que define implícitamente a $z = f(x, y)$ en todo punto de la superficie;
 - b) halle el gradiente de f en $(1, 1)$;
 - c) encuentre una ecuación para el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en $(1, 1, 1)$.

3.7 Anexo A. Derivadas de órdenes superiores para funciones compuestas

Consideremos el cálculo de derivadas segundas de funciones compuestas. Analicemos, por ejemplo, el caso 2×1 con $\mathcal{F}(u) = f(x(u), y(u))$. Vimos que su derivada primera se expresa como la suma de dos términos, donde cada término contiene una derivada parcial de f respecto de sus variables x e y (evaluadas en u). Ambas cantidades, $\frac{\partial f}{\partial x}(x(u), y(u))$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x(u), y(u))$, resultan ser nuevas funciones compuestas también del caso 2×1 :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] \left\langle \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\rangle u, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \left\langle \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\rangle u,$$

luego para derivar éstas aplicaremos la misma regla de la cadena que para \mathcal{F} . Discuta la validez de la siguiente expresión:

$$\frac{d^2 \mathcal{F}}{du^2} = \frac{d}{du} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] \frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d^2 x}{du^2} + \frac{d}{du} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \frac{dy}{du} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^2 y}{du^2}$$

donde (mirar los diagramas dados)

$$\frac{d}{du} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] (x(u), y(u)) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] \frac{dx}{du} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] \frac{dy}{du}$$

y

$$\frac{d}{du} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] (x(u), y(u)) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \frac{dx}{du} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \frac{dy}{du}.$$

Combine todas las expresiones y simplifique el resultado (use el teorema de Clairaut).

3.8 Actividades integradoras y autoevaluación

3.8.1 Actividades integradoras

- Dibuje la región D del plano xy que corresponde al dominio natural de las siguientes funciones. ¿Cuál es la imagen en cada caso?
 - $f(x, y) = x\sqrt{y}$
 - $H(x, y) = e^{x/y}$
 - $V(x, y) = \frac{x+y}{xy}$
 - $G(x, y) = \sqrt{4 - 12x^2 - 36y^2}$
 - $h(x, y) = \ln(4 - x - y)$
 - $F(x, y) = \ln(y - x^2)$
 - $S(x, y) = \arcsen(x + y)$
 - $T(x, y) = \arcsen(x^2 + y^2)$
- En el problema de tiro oblicuo del Ejemplo 2.4.2 del Capítulo 2, calcular la distancia (en línea recta) desde el punto de lanzamiento hasta la posición del objeto en cada instante, y calcular su variación para $t = \frac{9}{9.8}$ s.
- La temperatura T , presión P y volumen V de n moles de un gas ideal están relacionados por medio de la ley $PV = nRT$, donde R es la constante universal de los gases, la presión se mide en atmósferas, el volumen en litros, y la temperatura en grados Kelvin (la temperatura medida en la escala Kelvin se relaciona con la temperatura medida en la escala Celsius mediante $T_K = 273.15 + T_C$). Si se tienen $n = 0,123$ mol de un gas ideal, la expresión para la temperatura en función de volumen y presión resulta $T(V, P) = 100VP$. Dibuje en un plano VP las isothermas $T = 300, 450, \text{ y } 600$ K.

4. El siguiente texto es parte de la entrada de “isolínea” en Wikipedia <https://es.wikipedia.org/wiki/Isolinea>:

Una isolínea (también llamada isopleta, curva de nivel, isógrama o isoritma) para una función de varias variables, es una curva que conecta los puntos en que la función tiene un mismo valor constante.

Las isolíneas que se representan en un mapa son líneas, rectas o curvas, que describen la intersección de una superficie real o hipotética con uno o más planos horizontales. La configuración de estas curvas permite a los lectores del mapa inferir el gradiente relativo de la variable o parámetro y estimar un valor en un lugar determinado. El gradiente de la función es siempre perpendicular a la isolínea. Cuando las líneas están muy cerca, la longitud del gradiente es grande: la variación es acentuada. Si las isolíneas adyacentes tienen el mismo grosor de línea, la dirección del gradiente no puede determinarse y por ello se emplean diferentes grosores o se rotulan o etiquetan numéricamente: de este modo la dirección del gradiente puede ser fácilmente apreciada.

El uso más habitual de las isolíneas es en cartografía y en meteorología. Un mapa topográfico (o mapa de curvas de nivel) utiliza isolíneas que unen puntos de igual altitud y muestra, así, la forma de los valles y las colinas, y la pendiente de las laderas.

Analice este texto. Busque diferentes tipos de isolíneas, elija una e indique nombre, disciplina dentro de la cual se utiliza, qué magnitud es la que se mantiene constante, y represente con una imagen.

5. El Servicio Meteorológico Nacional provee información, entre otras, de contornos de temperatura y humedad relativa de nuestro país. Observe en el sitio web del SMN el último contorno disponible. Indique: cuáles son las funciones que se representan, y de qué dependen; cuáles son aproximadamente la temperatura y la humedad en La Plata; en qué ciudades se presentan las mayores y las menores temperaturas, y los mayores y los menores índices de humedad. Estando en La Plata, ¿hacia dónde habría que dirigirse para pasar menos calor?
6. Analice la continuidad de las siguientes funciones en todo \mathbb{R}^2 :

$$a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(xy)}{xy} & xy \neq 0 \\ 1 & xy = 0 \end{cases}$$

$$b) f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - 4y^2} & x^2 + 4y^2 \leq 1 \\ 0 & x^2 + 4y^2 > 1 \end{cases}$$

7. Encuentre $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ para la función $f(x, y) = x \cos(x) \cos(y)$.

8. a) El cambio entre coordenadas cartesianas y cilíndricas para puntos del espacio se hace mediante las funciones de 3 variables $x(r, \theta, z)$, $y(r, \theta, z)$, $z(r, \theta, z)$ como se vio en el Capítulo 1. Calcule las derivadas parciales de estas funciones, y luego evalúe el siguiente determinante (llamado *Jacobiano*):

$$J(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

- b) Pruebe que para la transformación entre coordenadas cartesianas x, y, z y coordenadas esféricas ρ, θ, ϕ , el Jacobiano de la transformación vale $\rho^2 \text{sen } \phi$.

9. Demuestre que si una función $f(x, y)$ es diferenciable en $(x_0, y_0) \in \text{Dom}(f)$, entonces $f(x, y)$ es continua en (x_0, y_0) .
10. ¿Dónde cruza al eje z , el plano tangente a la superficie $z = e^{x-y}$ en $P(1, 1, 1)$?
11. Sea $f(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ definida en $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Muestre que el plano tangente a la gráfica de f en $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ para $(x_0, y_0) \in D$ es ortogonal al vector $\overrightarrow{OP_0}$. Interprete gráficamente.

12. Halle una ecuación para el plano tangente a la superficie $z = f(x, y) = \frac{10}{xy}$ en el punto $P(1, 2, 5)$.
13. En cada uno de los siguientes casos, aproxime linealmente una función adecuada que permita luego estimar el valor indicado:
- $(0.99 e^{0.02})^8$
 - $(0.99)^3 + (2.01)^3 - 6 \cdot 0.99 \cdot 2.01$
 - $\sqrt{(4.01)^2 + (3.98)^2 + (2.02)^2}$

14. Cierta magnitud es función de la posición en el plano. Se sabe que, respecto de las coordenadas polares r y θ , la función verifica la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\operatorname{sen} \theta \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0.$$

Encuentre la ecuación en derivadas parciales que verifica la función respecto de las coordenadas cartesianas x e y .

15. Dada la función $G(u, v) = \int_a^{\operatorname{sen}(uv)} g(t) dt$, donde a es una constante real y g es una función continua de una variable real, halle la $\frac{\partial G}{\partial u}$ y $\frac{\partial G}{\partial v}$.

16. Un objeto se mueve en el espacio siguiendo la trayectoria definida por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ con

$$\begin{cases} x(t) = t e^{1-t} - 3t \\ y(t) = 5t^2 - 2t \\ z(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases}$$

donde $g(x, y)$ es una función escalar con derivadas parciales continuas; $t \geq 0$ denota el tiempo.

- Halle el vector velocidad para el instante $t = 1$, sabiendo que $\vec{\nabla}g(-2, 3) = (4, 1)$.
 - ¿Cuál es la rapidez de la partícula en el instante $t = 1$?
17. Sea $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ la temperatura en cada punto $P(x, y, z)$ de un depósito en el que se realiza una experiencia que dura 1 minuto. La experiencia comienza en el instante $t = 0$ s cuando se introduce en el depósito un objeto, que se desplaza dentro del habitáculo describiendo una curva definida por $\vec{r}(t) = (4 \cos(\pi t), \operatorname{sen}(\pi t), \frac{t}{6})$, donde t representa el tiempo medido en segundos. ¿A qué temperatura se encuentra la partícula cuando transcurren 20 s? En ese momento, ¿cuál es la razón de cambio de la temperatura a la que se encuentra la partícula, respecto del tiempo? Y cuándo la partícula se encuentra en el punto $P_0(4, 0, 7)$, ¿cuál es la razón de cambio de T respecto del tiempo?
18. Un objeto se mueve en el espacio tridimensional de manera que sus coordenadas en función del tiempo son $x = 4 \cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$ y $z = 5t$, para $t \geq 0$. Encuentre la razón de cambio de la distancia de la partícula al origen, $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, para $t = 5\pi$ segundos.
19. Se componen varias funciones de modo que $\mathcal{F}(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v, w))$. Se tienen los siguientes datos: $x(-2, 0, 3) = -1$, $y(-2, 0, 3) = 1$, $\vec{\nabla}x(-2, 0, 3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})$, $\vec{\nabla}y(-2, 0, 3) = (\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7})$, y $\vec{\nabla}f(-1, 1) = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$; se sabe además que x e y son diferenciables en $(-2, 0, 3)$ y que f es diferenciable en $(-1, 1)$. ¿Son suficientes estos datos para obtener $\mathcal{F}(-2, 0, 3)$? ¿Y $\vec{\nabla}\mathcal{F}(-2, 0, 3)$? En caso afirmativo, calcule.
20. Calcule la derivada direccional de $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$ en el punto $(3, 0)$, en la dirección del vector tangente a la parábola $y = x^2$ en $(1, 1)$.
21. ¿Cuánto vale la derivada direccional de una función diferenciable $f(x, y)$, en el punto (x_0, y_0) en la dirección tangente a la curva de nivel de f que pasa por dicho punto?
22. Considere la curva de nivel de $f(x, y) = (x - 2)^2 + 3xy - 2(y + 1)^2$ que pasa por el punto $P_0(2, 1)$. Determine la recta tangente L a la curva en el punto $P_0(2, 1)$ y una ecuación para la recta perpendicular en el punto P_0 . ¿Cuál es el valor de la máxima razón de cambio de f en P_0 ?

23. En el centro de un ambiente grande se coloca una estufa sobre el piso. Tomando la ubicación de la estufa como origen de coordenadas, la temperatura en un punto (x, y, z) está dada por $T(x, y, z) = \frac{40}{1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2}$ en grados Celsius, dando las distancias en metros. ¿En qué dirección aumenta la temperatura con más rapidez en el punto $(1, 1, 2)$? ¿Cuál es la máxima razón de aumento de la temperatura en dicho punto?
24. Sea $F(x, y, z) = 4 - x - y^2 + z^3 - \sin(xyz)$. Verifique que se cumplen las condiciones que garantizan que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente a $z = f(x, y)$ como una función diferenciable, en un entorno de $(0, 1, -1)$ y calcule $\vec{\nabla} z(0, 1)$.
25. Verificar que la función

$$f(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + B \cos(kx - \omega t)$$

con A, B, k, ω constantes, representa una onda que se propaga en el tiempo en dirección x con velocidad $v = \frac{\omega}{k}$. Para ello probar que f satisface la ecuación diferencial a derivadas parciales: $f_{tt} = v^2 f_{xx}$. Si x se da en metros y t en segundos, ¿cuáles serán las unidades de k, ω y v ?

26. Muestre que cualquier función con argumento $x \pm vt$ es solución de la *ecuación de ondas unidimensional*:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

donde x indica la posición (unidimensional, en metros), t indica el tiempo (en segundos), y v es una constante con unidades de m/s (de hecho, es la *velocidad de fase* de la onda). Para ello, considere la función $f(x, t) = F(x \pm vt)$ siendo F de clase C^2 , arbitraria. [Recuerde el Ejercicio 7b de la Sección 3.3, donde se planteó una solución particular de la ecuación de onda, de la forma $A \sin(kx - \omega t)$.]

27. a) Verifique que la función $u(x, t) = e^{-2t} \sin(4x)$ es una solución de la ecuación diferencial llamada *ecuación de conducción del calor*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

y determine cuál es el valor de la constante a .

- b) Compruebe que la función $u(x, y) = \cos(x^2 - y^2) \cosh(2xy)$ satisface la ecuación diferencial conocida como *ecuación de Laplace*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

3.8.2 Autoevaluación

Se propone que resuelva los siguientes ejercicios (del estilo de los que podrían plantearse en un parcial de la materia), en forma individual y dedicando aproximadamente 30 minutos en total. Justifique cada uno de los pasos en sus demostraciones teóricas; los cálculos numéricos puede dejarlos expresados (no es necesario el uso de la calculadora, a menos que necesite comparar valores numéricos).

1. Sea la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2 & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Analizar justificadamente:

- a) la continuidad de la función en \mathbb{R}^2 ;
 b) la diferenciable de la función en $(0, 0)$;

- c) la existencia de las derivadas parciales en $(0, 0)$.
2. Hallar, si es posible, una ecuación para el plano tangente al paraboloides elíptico dado por

$$z = 1 - \frac{x^2 + 4y^2}{10}$$

en cada uno de los siguientes puntos: a) $(1, 1, \frac{1}{2})$, b) $(1, 1, 33)$, c) $(0, 0, 1)$. Si no es posible, explicar el porqué. Esbozar un gráfico de la superficie, indicando cada punto dado y el plano tangente cuando corresponda.

3. Sea $f(x, y)$ diferenciable, con $x = u^2 - v^2$, $y = v^2 - u^2$. Muestre que, para cualquier función f , se verifica la ecuación diferencial

$$v \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} + u \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} = 0,$$

donde \mathcal{F} es la función compuesta.

4

Optimización de funciones escalares de varias variables

4.1	Optimización de funciones escalares de varias variables	146
4.1.1	Puntos críticos de una función de dos variables	146
4.1.2	Ejercicios	151
4.2	Clasificación de puntos estacionarios de una función de dos variables	151
4.2.1	Ejercicios	154
4.3	Extremos de una función de dos variables en una región cerrada y acotada	154
4.3.1	Ejercicios	157
4.4	Resolución de problemas con restricciones	157
4.4.1	Método de los multiplicadores de Lagrange: función de 2 variables y 1 vínculo	158
4.4.2	Método de los multiplicadores de Lagrange: función de 3 variables y 1 vínculo	161
4.4.3	Método de los multiplicadores de Lagrange: función de 3 variables y 2 vínculos	162
4.4.4	Aplicación al cálculo de extremos en una región cerrada y acotada	163
4.4.5	Ejercicios	165
4.5	Anexo A. Puntos críticos y estacionarios de una función de n variables	165
4.6	Anexo B. Justificación de criterios de las derivadas segundas	166
4.7	Actividades integradoras y autoevaluación	167
4.7.1	Actividades integradoras	167
4.7.2	Autoevaluación	168

4.1 Optimización de funciones escalares de varias variables

Consideremos una función $F(x)$ de una variable. Para estudiar su comportamiento, es conveniente hallar sus máximos y mínimos locales y absolutos, si posee. ¿Cómo procedemos para hallar los extremos locales de F ? Teniendo en cuenta lo estudiado en Análisis Matemático I, primero debemos buscar todos los puntos críticos de la función, es decir aquellos valores de la variable x para los cuales la derivada primera de F se anula o no existe. Luego, inspeccionamos cómo cambia la función alrededor de cada uno de los puntos críticos para ver si se trata de un extremo o no; en el caso de que sea un extremo, analizamos si corresponde a un máximo o un mínimo de F .

Pensemos ahora en una función f de varias variables. ¿Cómo pueden determinarse los extremos locales de f ? ¿Será conveniente extender la noción de punto crítico? En una variable, como vimos, juega un rol muy importante la derivada primera de la función. En varias variables, para analizar la razón de cambio de una función se ha introducido en el capítulo anterior el concepto de derivadas parciales y, más aún, se han definido las derivadas direccionales. Veremos que la idea de punto crítico puede extenderse para funciones de varias variables, siendo las derivadas parciales una herramienta muy útil a la hora de localizar maximizadores y minimizadores de funciones multivariadas.

4.1.1 Puntos críticos de una función de dos variables

Trabajaremos aquí con funciones de dos variables para funciones. Para funciones de tres o más variables, consultar el Anexo 4.5. Existen algunos conceptos ya conocidos del curso de Análisis Matemático I, que serán de utilidad en esta sección, pero también hay nociones nuevas.

Definición Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

- Se dice que f tiene un *máximo local* o *relativo* en $(x_M, y_M) \in D$, si $f(x_M, y_M) \geq f(x, y)$ para todo punto (x, y) en algún disco centrado en (x_M, y_M) . El punto (x_M, y_M) se denomina *maximizador local* de f . Si la desigualdad se verifica para todo punto del dominio de f , el máximo es *absoluto* o *global*.
- Se dice que f tiene un *mínimo local* o *relativo* en $(x_m, y_m) \in D$, si $f(x_m, y_m) \leq f(x, y)$ para todo punto (x, y) en algún disco centrado en (x_m, y_m) . El punto (x_m, y_m) se denomina *minimizador local* de f . Si la desigualdad se verifica para todo punto del dominio de f , el mínimo es *absoluto* o *global*.

Los máximos y mínimos locales constituyen los *extremos locales* o *relativos* de la función f .

La definición expresa que: si f tiene un máximo relativo en (x_M, y_M) , entonces el valor de la función en dicho punto es el mayor valor que toma f para cualquier punto en los alrededores de (x_M, y_M) ; mientras que si f tiene un mínimo relativo en (x_m, y_m) , el valor de la función en dicho punto es el menor valor que toma f para cualquier punto en los alrededores de (x_m, y_m) . Ver Figura 4.1.1.

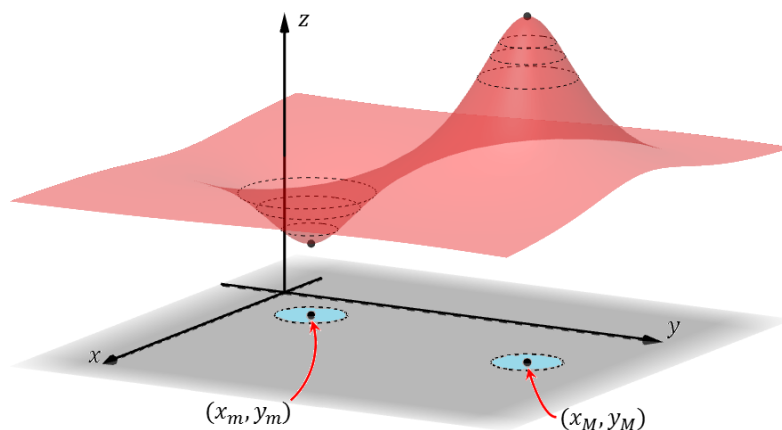


Figura 4.1.1: Gráfica de una función de 2 variables que presenta extremos.

Nos abocaremos a la búsqueda de extremos. Recordemos distintas situaciones en el caso de funciones de una variable. Por ejemplo $F_1(x) = x^2$ presenta solamente un mínimo local (y también absoluto), lo mismo ocurre con la función $F_2(x) = |x|$; la función $F_3(x) = x^3$ no posee ni máximos ni mínimos locales, ni absolutos, por ende; mientras que $F_4(x) = x^3 - x$ tiene un máximo local (no absoluto) y un mínimo local (no absoluto). En el caso de funciones de dos variables, pueden tener uno o varios extremos locales, o ninguno. Es fácil ver, por ejemplo, que $f_1(x, y) = 3 + x^2 + y^2$ presenta un mínimo local (y absoluto), mientras que $f_2(x, y) = x + y$ no posee extremos locales (ni absolutos).

Para determinar los extremos de una función escalar de dos variables, vamos a ubicar primeramente los puntos críticos de la función.

Definición Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Un punto (x_c, y_c) perteneciente al dominio de f es un *punto crítico* de f si:

- las dos derivadas parciales primeras de f se anulan en (x_c, y_c) , ó
- al menos una de las derivadas parciales primeras de f no existe en (x_c, y_c) .

En el primer caso (o sea, cuando el gradiente de f en el punto es el vector nulo), se dice que (x_c, y_c) es un *punto estacionario* de f .

Por ejemplo $f_1(x, y) = 3 + x^2 + y^2$ presenta un (único) punto estacionario, $(0, 0)$, donde tanto f_x como f_y se anulan; la función $f_2(x, y) = x + y$ no posee puntos críticos; mientras que $f_3(x, y) = x + \sqrt{y}$ tiene (infinitos) puntos críticos, de la forma $(a, 0)$, es decir todos los puntos del eje x , pues no existe f_y cuando $y = 0$.

El siguiente teorema asegura que todo extremo local es necesariamente un punto crítico. Sin embargo, no todo punto crítico será un extremo. Para hallar extremos de una función, se deberá buscar primero todos los puntos críticos; de esa forma, se tendrán todos los “candidatos a extremos”, luego habrá que clasificarlos (si son o no extremos, o si son otra cosa).

Teorema 4.1.1 Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, D un conjunto abierto. Si f tiene un máximo o mínimo local en $(x_0, y_0) \in D$ y si existen las derivadas parciales primeras de f en dicho punto, entonces $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$.

De este teorema también se puede deducir que si la gráfica de f admite plano tangente en un máximo o mínimo local, entonces dicho plano tangente es horizontal, dado por $z = f(x_0, y_0)$.

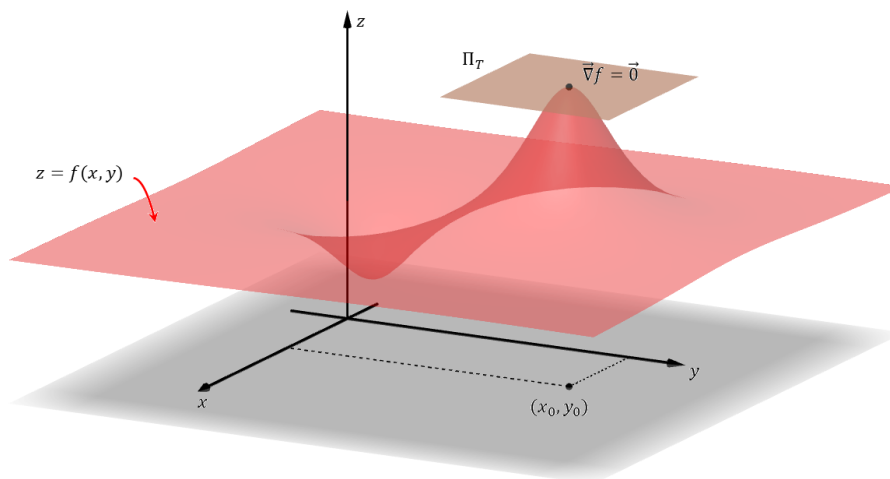


Figura 4.1.2: El plano tangente a la gráfica de una función f de 2 variables en un extremo local de f es horizontal.

Veamos algunos ejemplos típicos de funciones de dos variables. Por ahora buscaremos extremos de manera intuitiva, haciendo un análisis cualitativo de la función y aplicando métodos gráficos. En la próxima sección presentaremos un método analítico.

■ **Ejemplo 4.1.1** Hallar, si existen, los máximos y mínimos locales de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 2y + 12$ usando procedimientos gráficos. Si f posee extremos calcular, si existen, f_x y f_y en cada uno de ellos. Determinar una ecuación del plano tangente a la gráfica de f , en cada uno de los extremos hallados.

Como la función polinomial dada está bien definida para cualquier par (x, y) de números reales, el dominio de f es todo \mathbb{R}^2 . ¿Cuál es la imagen de f ? Completando cuadrados, podemos reescribir $f(x, y) = (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + 2$, de donde observamos que la imagen de f es el intervalo $[2, +\infty)$.

Hagamos un análisis gráfico de la función, por medio de: (i) su mapa de contornos, (ii) su superficie gráfica.

(i) Veamos algunas curvas de nivel, dadas por $f(x, y) = k$. La curva de nivel de valor k ($k \geq 2$) es el conjunto de puntos del plano xy que satisface $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = k - 2$. Así, para $k = 2$ consiste de un solo punto, el $(3, 1)$, y para cada $k > 2$ es una circunferencia de radio $\sqrt{k - 2}$ con centro en $(3, 1)$. Si observamos la Figura 4.1.3a), notamos que los valores de f crecen indefinidamente a medida que nos alejamos (en circunferencias concéntricas) del punto $(3, 1)$. Este análisis nos permite deducir que f tiene un minimizador local y absoluto en $(3, 1)$, donde la función es igual a 2, y que f no posee un valor máximo.

(ii) Veamos la representación de la función por medio de su gráfica en el espacio, dada por $z = f(x, y)$. La ecuación de la superficie gráfica resulta $z - 2 = (x - 3)^2 + (y - 1)^2$, que nos recuerda a una de las cuádricas: un paraboloide de eje z con vértice en $V(3, 1, 2)$ y que abre hacia arriba. Observamos en la Figura 4.1.4b) que la función tiene un minimizador local y absoluto en $(3, 1)$ y que no posee máximos locales (entonces tampoco máximos absolutos); además, se ve que el valor mínimo que toma la función es $f(3, 1) = 2$. Esto confirma lo sugerido por las curvas de nivel.

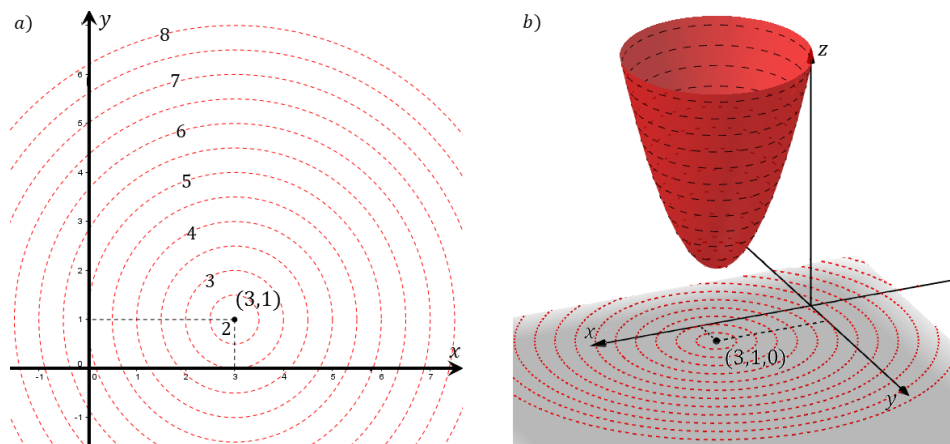


Figura 4.1.3: Representación de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 2y + 12$ mediante a) curvas de nivel; b) gráfica de la función.

Veamos ahora, ¿cuál es el valor de las derivadas parciales en $(3, 1)$? Tenemos que $f_x(x, y) = 2x - 6$, $f_y(x, y) = 2y - 2$. Evaluando en $(3, 1)$ resulta $f_x(3, 1) = 0$, $f_y(3, 1) = 0$. O sea que $(3, 1)$ es un punto estacionario de f , y es el único (ya que f_x y f_y se anulan simultáneamente sólo para $x = 3$, $y = 1$).

Por otro lado, como f es diferenciable en todo su dominio, existe el plano tangente a la superficie gráfica de f en todo punto. En particular en $(3, 1, 2)$, el vértice del paraboloide, una ecuación para el plano tangente es $f_x(3, 1)(x - 3) + f_y(3, 1)(y - 1) - (z - f(3, 1)) = 0$, y reemplazando valores resulta $z - 2 = 0$, que es un plano horizontal.

Si representamos gráficamente al paraboloide y al plano tangente, notamos que para (x, y) cerca de $(3, 1)$ los puntos $(x, y, f(x, y))$ del paraboloide se encuentran todos por arriba del plano tangente, indicando que $f(x, y) \geq 2$. Como $f(3, 1) = 2$, entonces $f(x, y) \geq f(3, 1)$, confirmando que $(3, 1)$ es un minimizador local. De hecho, esto ocurre no sólo en los alrededores de $(3, 1)$ sino en todo el dominio de f por lo que el mínimo es, además, absoluto. ■

■ **Ejemplo 4.1.2** Analizar el comportamiento de $f(x, y) = |x|$ para obtener sus extremos, si posee.

Esta función de dos variables está definida en todo \mathbb{R}^2 , y su imagen es $[0, +\infty)$. La traza de su superficie gráfica con un plano vertical $y = b$ es la curva quebrada que representa a la función valor absoluto, para cualquier $b \in \mathbb{R}$. Resulta que la gráfica de f es la superficie $z = |x|$, dada por dos semiplanos que forman un ángulo o quiebre en todos los puntos del eje y .

Analicemos ahora las derivadas parciales primeras de la función. La derivada parcial de f respecto de y es cero para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ya que la función no depende de y . Por otro lado, sabemos que la función de una variable $F(x) = |x|$ no tiene derivada en $x = 0$, lo que nos permite deducir que en cualquier punto $(0, b)$, con $b \in \mathbb{R}$, la derivada parcial de f respecto de x no existe (compruébelo analíticamente, planteando la derivada parcial por definición en $(0, b)$). Precisamente esos son los (infinitos) puntos críticos de f . Conociendo el comportamiento de la función valor absoluto de una variable, podemos deducir que los puntos críticos hallados corresponden a mínimos absolutos de f . El valor mínimo de f es $f(0, b) = |0| = 0$. Es fácil ver que la función no posee máximo.

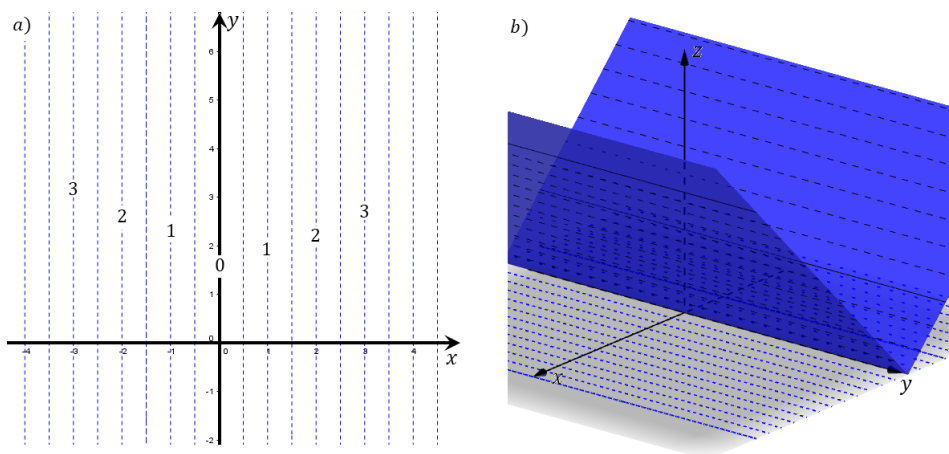


Figura 4.1.4: Representación de $f(x, y) = |x|$ mediante a) curvas de nivel; b) gráfica de la función. ■

■ **Ejemplo 4.1.3** Estudiar los valores extremos de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

El dominio de la función es todo \mathbb{R}^2 , y su imagen es $[0, +\infty)$. La traza de su superficie gráfica con el plano vertical $y = 0$ es la curva quebrada $z = |x|$ en el plano xz ; la traza con el plano vertical $x = 0$ es la curva quebrada $z = |y|$ en el plano yz . Deducimos que en $(0, 0)$ no existe ninguna de las dos derivadas parciales de f . Precisamente ése es el único punto crítico de esta función. Reconocemos a la superficie gráfica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ como la mitad

superior de un cono de eje z con vértice en el origen. El único punto crítico de f resulta ser un minimizador absoluto, donde la función vale 0; y f no posee máximo.

A partir del análisis realizado, discutir: cómo se comportarán las funciones de la forma $g(x, y) = a_1\sqrt{x^2 + y^2} + a_0$, con $a_1 \neq 0$ y a_0 constantes fijas (considerar por separado los casos $a_1 > 0$ y $a_1 < 0$). ■

Analizaremos ahora una situación novedosa que encontramos para funciones de dos variables. Comenzamos por el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 4.1.4** Estudiar gráficamente la función $f(x, y) = x^2 - y^2$, analizando si tiene o no extremos locales.

El dominio de f es todo \mathbb{R}^2 . Para estudiar el comportamiento de la función trazaremos primero algunas curvas de nivel. Es fácil ver que la imagen de la función es todo \mathbb{R} , por lo que podemos considerar curvas de nivel para cualquier valor real de k .

Consideremos, a modo de ejemplo, $k = 0, \pm 1, \pm 4$. La curva de nivel de valor k es el conjunto de puntos del plano xy que satisface $x^2 - y^2 = k$. Así, para $k = 0$ tenemos $y = \pm x$, o sea que la curva de nivel 0 consiste de dos rectas que pasan por el origen y tienen pendiente $+1$ y -1 respectivamente. Para $k = 1$ la curva de nivel es una hipérbola que cruza al eje x en los puntos $(\pm 1, 0)$; de manera análoga, para $k = 4$ la curva de nivel es una hipérbola que cruza al eje x en los puntos $(\pm 2, 0)$. Para $k = -1$, obtenemos la curva $x^2 - y^2 = -1$, esto es, una hipérbola que cruza al eje y en los puntos $(0, \pm 1)$; para $k = -4$ se obtiene la hipérbola que cruza al eje y en los puntos $(0, \pm 2)$. Se muestran varias curvas de nivel en la Figura 4.1.5a). A partir del análisis de las curvas de nivel, notamos un comportamiento particular de f en torno al origen. Para ayudar a visualizar la situación planteamos otra técnica: consideremos la gráfica de la función en el espacio, dada por la superficie $z = x^2 - y^2$, que es una cuádrica conocida (¿cuál?), y miremos algunas trazas verticales. La traza con $y = 0$ es la parábola $z = x^2$ que abre hacia arriba en el plano xz , mientras que la traza con $x = 0$ es la parábola $z = -y^2$ que abre hacia abajo en el plano yz . Las trazas verticales con $y = b \neq 0$ también son parábolas que abren hacia arriba, mientras que con $x = a \neq 0$ abren hacia abajo. Ahora estamos en condiciones de visualizar la gráfica: es la llamada *silla de montar* (técnicamente, el paraboloides hiperbólico del Capítulo 1) que se muestra en la Figura 4.1.5b). Al observar el gráfico notamos que la superficie $z = x^2 - y^2$ tiene cerca del origen un comportamiento especial, que no corresponde a un máximo ni a un mínimo.

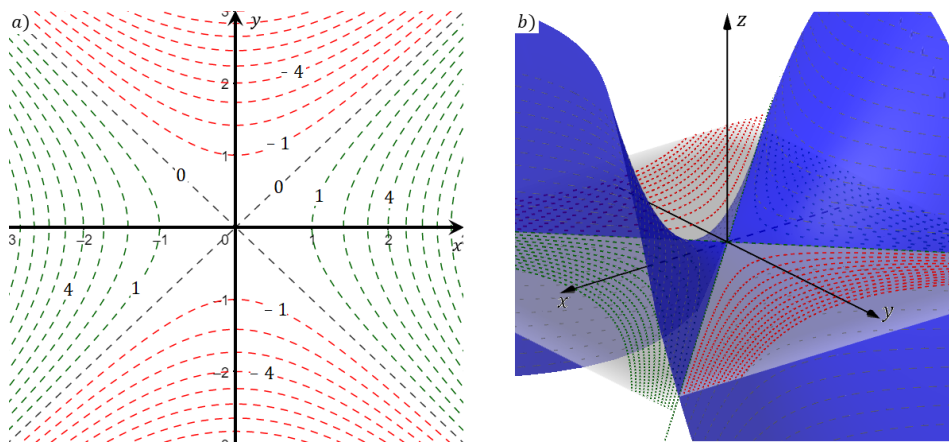


Figura 4.1.5: Representación de $f(x, y) = x^2 - y^2$ mediante a) curvas de nivel; b) gráfica de la función.

Nos preguntamos, ¿cuál es el valor de las derivadas parciales de f en $(0, 0)$? Tenemos

que $f_x(x, y) = 2x$ y $f_y(x, y) = -2y$. Por lo tanto, $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$. O sea que $(0, 0)$ es un punto estacionario de f , y es el único.

La función en $(0, 0)$ vale 0. Examinando los valores que toma en puntos cercanos al origen, vemos que para puntos de la forma $(a, 0)$, con $a \neq 0$, se tiene $f(a, 0) = a^2 > 0 = f(0, 0)$, y para puntos de la forma $(0, b)$, con $b \neq 0$, se tiene $f(0, b) = -b^2 < 0 = f(0, 0)$. Estas desigualdades son válidas aún para valores de a y b muy pequeños, por lo tanto $(0, 0)$ no puede ser ni un minimizador relativo ni un maximizador relativo: de hecho, es lo que se denomina un “punto de ensilladura”. Concluimos que f no tiene extremos relativos (ni absolutos, por ende), pero posee un punto de ensilladura. ■

Pensemos en la función de una variable $F(x) = x^3$, para la cual $x = 0$ es su único punto crítico estacionario. F no tiene ni máximo ni mínimo local en \mathbb{R} . En $x = 0$ se anula la derivada primera de F , pero no hay un extremo relativo de F . En una variable, un punto con estas características se llama punto de inflexión. Como vimos en el ejemplo, la situación es más rica para funciones de varias variables, donde se define el llamado *punto de ensilladura* o *punto silla*.

Definición — Puntos de ensilladura (o puntos silla). Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f tiene un *punto de ensilladura* o *punto silla*, en (x_s, y_s) si $f_x(x_s, y_s) = 0$, $f_y(x_s, y_s) = 0$ [esto es, (x_s, y_s) es un punto estacionario de f] pero (x_s, y_s) no es un extremizador local de f , o sea que para cada disco centrado en (x_s, y_s) existen en D puntos donde $f(x, y) > f(x_s, y_s)$ y puntos donde $f(x, y) < f(x_s, y_s)$.

4.1.2 Ejercicios

1. Halle todos los puntos críticos de las siguientes funciones, si poseen:

$$a) f(x, y) = \ln[2 + \operatorname{sen}(xy)]$$

$$b) g(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy + 10$$

$$c) h(x, y) = x^5y + xy^5 + xy$$

2. Halle todos los puntos estacionarios de las siguientes funciones, si poseen, y decida por inspección si cada uno de ellos es un máximo local, un mínimo local o un punto silla:

$$a) f(x, y) = e^{-x^2-7y^2}$$

$$b) g(x, y) = e^{x^2+2y^2}$$

$$c) h(x, y) = e^{x^2-5y^2}$$

3. Revea los Ejemplos 3.1.11 y 3.1.12 del Capítulo 3 y responda para cada una de las funciones, observando las curvas de nivel de la Figura 3.1.4 de ese mismo capítulo, ¿posee extremos locales? En caso afirmativo, ¿cuáles son?, y ¿cuál es el valor de la función allí?

4.2 Clasificación de puntos estacionarios de una función de dos variables

Dada una función de dos variables hemos visto cómo hallar sus puntos críticos y, en algunos casos, mediante inspección de la función o por métodos gráficos hemos podido clasificarlos como extremizador (maximizador o minimizador) o como punto de ensilladura. Veremos ahora, para funciones de clase C^2 , un criterio analítico de clasificación de puntos estacionarios, que hace uso de las derivadas parciales segundas de la función evaluadas, en dichos puntos. Este criterio es una extensión de una propiedad análoga vista en Análisis Matemático I.

Repasemos la manera de obtener y clasificar puntos críticos para una función $F(x)$ de una variable. Primero se determinan todos los valores de x para los que $F'(x)$ se anula o no existe; por teorema, esos valores críticos de la variable son los únicos candidatos a ser extremos de la función. Una técnica que se puede utilizar es el *criterio de la derivada primera* que consiste en analizar el signo de F' en el entorno de cada valor crítico (esto es, para x cercanos a x_c). Sabemos que el

crecimiento o decrecimiento de F indica si el punto crítico corresponde a un extremo (máximo o mínimo) local, o a un punto de inflexión de F . En el caso de los puntos estacionarios, para los cuales la derivada primera existe y es nula [esto es, cuando la función es derivable en $x = x_e$ con $F'(x_e) = 0$], una alternativa es utilizar el *criterio de la derivada segunda*. Éste consiste en analizar el signo de F'' en el punto estacionario mismo (esto es, para $x = x_e$). Se prueba que:

- Si $F''(x_e) > 0$, entonces el punto estacionario x_e es un minimizador local de F . Ejemplo: $F(x) = x^2$ tiene un minimizador en $x_e = 0$.
- Si $F''(x_e) < 0$, entonces el punto estacionario x_e es un maximizador local de F . Ejemplo: $F(x) = \sin x$ tiene un maximizador en $x_e = \frac{\pi}{2}$.

Además, si $F'(x_c) = 0$ y $F''(x_c) = 0$ este criterio no decide, y es necesario otro tipo de análisis.

Ejemplos: $F_1(x) = x^3$ y $F_2(x) = x^4$ tienen un punto estacionario en $x_e = 0$, con derivada primera y segunda nulas en dicho punto; pero en un caso es un punto de inflexión, en el otro un extremo (minimizador).

En el Anexo 4.6 se da una justificación de este criterio de la derivada segunda para una función de una variable.

Una idea similar a ésta permite clasificar los puntos estacionarios de una función $f(x, y)$ de dos variables de clase C^2 , esto es, cuando la función es diferenciable en (x_e, y_e) con $f_x(x_e, y_e) = 0$ y $f_y(x_e, y_e) = 0$. El criterio involucra ahora las derivadas parciales segundas de $f(x, y)$, que son cuatro, combinadas convenientemente formando el llamado *Hessiano* de f , definido como:

$$Hf(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$$

donde se usó el Teorema de Clairaut en el último término.

Criterio de las derivadas parciales segundas para clasificar puntos estacionarios de una función de dos variables

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 (esto es, con derivadas parciales segundas continuas) en un disco centrado en (x_e, y_e) , siendo $(x_e, y_e) \in D$ un punto estacionario de f (esto es, $\vec{\nabla}f(x_e, y_e) = \vec{0}$).

Sea $\mathcal{D}(x_e, y_e) = Hf(x_e, y_e) = f_{xx}(x_e, y_e)f_{yy}(x_e, y_e) - [f_{xy}(x_e, y_e)]^2$ el valor del Hessiano de f evaluado en el punto estacionario. Se tiene que:

- Si $\mathcal{D}(x_e, y_e) > 0$, entonces (x_e, y_e) es un extremizador local de f ; además,
 - si $f_{xx}(x_e, y_e) > 0$, se trata de un minimizador local;
 - si $f_{xx}(x_e, y_e) < 0$, se trata de un maximizador local.
 - Si $\mathcal{D}(x_e, y_e) < 0$, entonces (x_e, y_e) es un punto de ensilladura de f .
- Además, si $\mathcal{D}(x_e, y_e) = 0$, este criterio no decide, y es necesario otro tipo de análisis.

En el Anexo 4.6 se da una justificación de este criterio de las derivadas parciales segundas para una función de dos variables. Verifique el criterio para los ejemplos de la sección anterior. Preste atención a que la función sea de clase C^2 para poder aplicar el criterio. En tal caso determine todos los puntos estacionarios y arme el Hessiano de la función; luego para cada punto estacionario evalúe \mathcal{D} y analice el signo.

- **Ejemplo 4.2.1** Hallar y clasificar todos los puntos estacionarios que posee la función $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Por tratarse de una función polinomial, su dominio es todo \mathbb{R}^2 ; además es diferenciable y de clase C^2 en todo su dominio. El vector gradiente es $\vec{\nabla}f(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$ y es igual al vector nulo cuando ambas componentes se anulan simultáneamente, esto es

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

De la primera ecuación se tiene $x^2 - y = 0$, o sea $y = x^2$. Reemplazando y en la segunda ecuación, $y^2 - x = 0$, queda

$$x^4 - x = 0 \quad \iff \quad x(x^3 - 1) = 0 \quad \implies \quad x = 0 \quad \text{o} \quad x = 1.$$

Entonces por un lado tenemos que cuando $x = 0$, resulta de la primera ecuación que $y = 0^2 = 0$, luego hay un punto estacionario en $(0, 0)$. Por otro lado cuando $x = 1$, resulta $y = 1^2 = 1$, luego hay un punto estacionario en $(1, 1)$. El sistema de ecuaciones no presenta otras soluciones. En conclusión, la función f tiene dos puntos estacionarios: $(0, 0)$ y $(1, 1)$, únicamente.

El siguiente paso es armar el Hessiano de f y evaluarlo en cada punto estacionario, por separado, para clasificar el punto. Se tiene

$$Hf(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 6x \cdot 6y - (-3)^2 = 36xy - 9 = 9(4xy - 1).$$

Luego

$$\mathcal{D}(0, 0) = Hf(0, 0) = 0 - 9 = -9 < 0,$$

por lo que f tiene en $(0, 0)$ un punto silla, de valor $f(0, 0) = 0$. Mientras que

$$\mathcal{D}(1, 1) = Hf(1, 1) = 36 - 9 = 27 > 0,$$

por lo que f tiene en $(1, 1)$ un extremo relativo, de valor $f(1, 1) = -1$; además de acuerdo al criterio este extremo es un minimizador local, pues $f_{xx}(1, 1) > 0$ (notar que también $f_{yy}(1, 1) > 0$). Podemos agregar, por inspección, que no se trata de un mínimo absoluto pues, por ejemplo, para puntos (x, y) sobre la recta $y = x$ muy alejados del origen en el tercer cuadrante, la función toma los valores $f(x, x) = 2x^3 - 3x^2 \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$. ■

- Ⓒ Para el caso de un extremo relativo: Cuando en el punto estacionario el Hessiano da positivo y se quiere ver si el extremo es máximo o mínimo, es indistinto utilizar f_{xx} ó f_{yy} . Claramente ambas derivadas parciales deben tener el mismo signo, porque de otra forma el Hessiano no podría dar un número positivo.

- **Ejemplo 4.2.2** ¿Posee extremos relativos la función $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$? ¿De qué tipo? ¿Dónde? ¿Qué valor toma f en dichos puntos?

La función f es de clase C^2 en todo \mathbb{R}^2 , por ser polinomial. Esto significa que sus puntos críticos, si posee, son todos puntos estacionarios, que se obtienen a partir de la anulación simultánea de ambas derivadas parciales primeras. Busquemos los puntos estacionarios y

clasifiquémoslos de acuerdo al criterio, si es posible. El cálculo de las derivadas parciales primeras de f da: $f_x(x, y) = 4x^3 - 4(x - y)$, $f_y(x, y) = 4y^3 + 4(x - y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Que ambas sean nulas implica resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^3 - (x - y) = 0 \\ y^3 + (x - y) = 0. \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones se tiene $x^3 + y^3 = 0$, de donde $y^3 = -x^3$, luego $y = -x$. Reemplazando en la primera ecuación da $x^3 - 2x = 0$, o sea $x(x^2 - 2) = 0$, cuyas soluciones son: $x = 0$ (luego $y = 0$) ó $x = \pm\sqrt{2}$ (luego $y = \mp\sqrt{2}$, respectivamente). En conclusión, la función f tiene tres puntos estacionarios: $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

El siguiente paso es armar el Hessiano de f y evaluarlo en cada punto estacionario, por separado, para clasificar cada punto. Se tiene

$$Hf(x, y) = \begin{vmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{vmatrix} = (12x^2 - 4)(12y^2 - 4) - 4^2 = 48(3x^2y^2 - x^2 - y^2).$$

Luego $\mathcal{D}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0$, por lo que f tiene en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ un extremo relativo, más aún, se trata de un minimizador local pues $f_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0$; probar que lo mismo ocurre para el punto estacionario $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Mientras que $\mathcal{D}(0, 0) = 0$, entonces el criterio no permite decidir si f tiene un extremo o un punto silla en $(0, 0)$; en este caso debemos inspeccionar la función para saber cómo se comporta cerca del origen: por ejemplo para puntos en la recta $y = x$ se tiene $f(x, x) = 2x^4 > 0 = f(0, 0)$, pero para puntos en el eje y se tiene $f(0, y) = y^4 - 2y^2 < 0 = f(0, 0)$ cuando y es pequeño (de hecho, cuando $|y| < \sqrt{2}$). Este análisis permite deducir que el punto estacionario $(0, 0)$ es un punto silla.

Las respuestas al enunciado del ejercicio son entonces: sí, la función f posee dos extremos relativos, ambos mínimos locales, en los puntos $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ para los que $f = -8$. Grafique la función usando Geogebra y observe que los mínimos son absolutos: la función no toma valores por debajo de -8 . Agregamos que f no posee máximos locales ni absolutos, y que f presenta un punto silla en $(0, 0)$. ■

4.2.1 Ejercicios

- Halle el valor de cada función en sus máximos y mínimos locales y en sus puntos silla:
 - $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$
 - $f(x, y) = xy - 2x - y$
 - $f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2}$
 - $h(x, y) = x \operatorname{sen} y$
- Encuentre los máximos y mínimos locales y los puntos silla de las siguientes funciones:
 - $g(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$
 - $f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy}$
- Dada la función $f(x, y) = x^2y$:
 - halle todos sus puntos estacionarios;
 - el criterio de las derivadas segundas, ¿permite clasificar los puntos estacionarios de f ?
 - analice los puntos estacionarios.

4.3 Extremos de una función de dos variables en una región cerrada y acotada

Hasta ahora hemos analizado para una función de dos variables, sus extremos relativos en dominios abiertos. En ocasiones es necesario determinar los valores extremos de una función en un dominio restringido a cierto subconjunto especial de \mathbb{R}^2 , por ejemplo: un cuadrante (región semiabierta), un círculo, una región triangular o cuadrada cerrada, una curva, etc.

Sabemos que si una función de una variable es continua en un intervalo cerrado, entonces alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos en el intervalo. Recordemos que un intervalo cerrado de la recta real es aquel que contiene a sus puntos del borde. Efectivamente, para una función continua $F(x)$ de una variable, definida en un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, los extremos absolutos pueden ocurrir o bien como puntos críticos de F dentro del intervalo abierto (a, b) , o bien en los bordes del intervalo, a ó b . Para determinar los extremos absolutos se debe entonces evaluar la función no sólo en los puntos críticos, que caen en el interior del intervalo, sino además en la frontera del segmento, esto es, en los puntos inicial y final del intervalo.

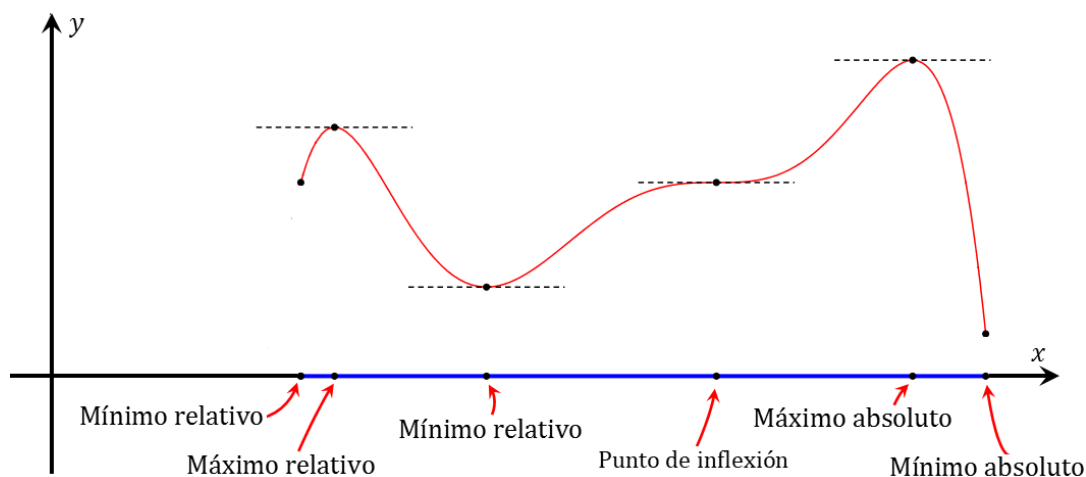


Figura 4.3.1: Clasificación de puntos estacionarios de una función derivable de 1 variable en un intervalo cerrado.

Una situación similar ocurre para funciones de dos variables.

Definición — Conjuntos cerrados y acotados. Un subconjunto D de \mathbb{R}^2 se dice *cerrado* si contiene a su frontera. La *frontera* de D , que suele anotarse como ∂D , se define como el conjunto de puntos (x_f, y_f) tales que todo disco centrado en (x_f, y_f) contiene puntos que están en D y puntos que no están en D .

Por otro lado, un subconjunto D de \mathbb{R}^2 se dice *acotado* si D está contenido en algún disco.

Por ejemplo, el conjunto $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ está formado por todos los puntos del círculo de radio 1 centrado en el origen: los interiores ($x^2 + y^2 < 1$) más los que están en la circunferencia ($x^2 + y^2 = 1$) que es la frontera; entonces es un conjunto cerrado porque contiene a su frontera, y está acotado debido a que puede encerrarse con un círculo (de radio mayor que 1).

La región triangular con vértices $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, \frac{3}{2})$ puede rodearse con una circunferencia de radio 2; entonces es una región acotada porque está contenida en un disco, y es cerrada porque contiene a los lados del triángulo que son su frontera.

Enunciamos el siguiente teorema para conjuntos cerrados y acotados de \mathbb{R}^2 y funciones continuas de dos variables:

Teorema 4.3.1 Sea D un conjunto cerrado y acotado de \mathbb{R}^2 , y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables, continua en D . Entonces f alcanza valores máximo absoluto y mínimo absoluto en D .

Dicho de otra forma, si f es una función continua en un conjunto cerrado y acotado $D \subset \mathbb{R}^2$, existen puntos en D para los cuales f alcanza su mayor valor y puntos para los que alcanza su menor valor. Dichos puntos están en el interior de D (y son puntos críticos de f) y/o en la frontera ∂D .

La búsqueda de los extremos absolutos de una función continua $f(x, y)$ en una región D cerrada y acotada del plano, se puede organizar de la siguiente forma:

- (1) Hallar todos los puntos críticos de $f(x, y)$ en el interior de D , e identificar entre éstos los que son extremos relativos de f (si posee).

- (2) Hallar los puntos de la frontera de D donde $f(x, y)$ tiene extremos locales.
- (3) Los únicos candidatos a ser extremos absolutos de la función son los puntos hallados en los pasos (1) y (2). Evaluar f en los puntos hallados; comparar los valores que toma la función en dichos puntos, y seleccionar el mayor y el menor de todos ellos.

■ **Ejemplo 4.3.1** Analizar los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2$ en el círculo de radio 1 centrado en el origen.

Se trata de una función continua por ser polinomial, definida en un círculo que es una región cerrada y acotada del plano. Luego, por el Teorema 4.3.1 presenta extremos absolutos; además, ello ocurrirá en un punto crítico interior al círculo, o en un punto de la circunferencia frontera.

Pensemos gráficamente la situación planteada: encontrar el máximo y el mínimo absolutos de f equivale a ubicar en la superficie gráfica de f los puntos más alto y más bajo, respectivamente. En este ejemplo la gráfica está dada por $z = x^2 + 2y^2 + 2$, que corresponde a la ecuación de un paraboloides elíptico que abre hacia arriba desde el vértice $(0, 0, 2)$. Recordemos que buscamos los extremos de $f(x, y)$ cuando las variables independientes están en el círculo de radio 1; por lo tanto, el dominio está restringido al conjunto $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ del plano xy , cuya frontera es la curva C dada por $x^2 + y^2 = 1$. Así, del paraboloides sólo debemos mirar la parte que está contenida por el cilindro circular recto de eje z y radio 1. Analizamos: (1) la parte de la superficie gráfica de f que corresponde al interior de D ($x^2 + y^2 < 1$), y (2) la curva C_S que se obtiene como intersección del paraboloides y la superficie cilíndrica, que corresponde a la frontera de D ($x^2 + y^2 = 1$), como se muestra en la Figura 4.3.2.

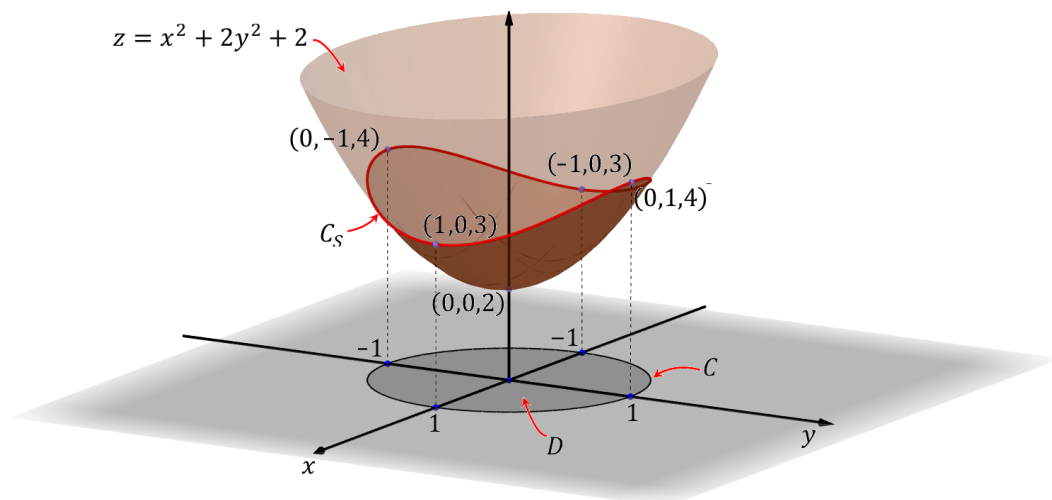


Figura 4.3.2: Gráfica de $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2$, para (x, y) tales que $x^2 + y^2 \leq 1$. En este conjunto, la función tiene un mínimo absoluto en $(0, 0)$, y máximos absolutos en $(0, -1)$ y $(0, +1)$.

Al observar la figura notamos que f tiene un mínimo en $(0, 0)$ siendo $f(0, 0) = 2$. Efectivamente, $(0, 0)$ es el único punto estacionario de f , que minimiza la función y pertenece al interior de D . En la figura vemos que la curva por encima de la frontera de D tiene el “punto más alto” para $(0, \pm 1)$ y “el punto más bajo” para $(\pm 1, 0)$. Efectivamente, como los puntos de esta curva satisfacen simultáneamente: $x^2 + y^2 = 1$ y $z = 3 + y^2$, resulta que para los puntos del borde de D , f toma los valores máximo y mínimo respectivamente para $y = \pm 1$ con $x = 0$, y para $y = 0$ con $x = \pm 1$, respectivamente, siendo $f(0, \pm 1) = 4$ y $f(\pm 1, 0) = 3$. Alternativamente, los extremos de f sobre la circunferencia podrían determinarse mediante una parametrización de la misma, por ejemplo $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$. Ahora

consideramos $F(t) = f(\vec{r}(t)) = f(\cos t, \sin t) = (\cos t)^2 + 2(\sin t)^2 + 2 = 3 + \sin^2 t$, y buscamos los extremos de $F(t)$, como función continua de una variable en el intervalo cerrado $[0, 2\pi]$. Consideramos los valores de t que anulan $F'(t) = 2 \sin t \cos t$ en el intervalo $0 < t < 2\pi$, más los bordes de dicho intervalo; finalmente los candidatos a extremos de $F(t)$ son: $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$. Los puntos de la circunferencia correspondientes a esos valores de t son: $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1), (1, 0)$, respectivamente.

En resumen, los (únicos) candidatos a extremos de f en D son los puntos: $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (-1, 0)$ y $(0, -1)$. Los valores que toma la función en dichos puntos son, respectivamente: 2, 3, 4, 3 y 4. Finalmente concluimos que f en el círculo unidad posee un mínimo absoluto en $(0, 0)$ y dos máximos absolutos, uno en $(0, 1)$ y otro en $(0, -1)$; y se tiene $\text{Im}(f) = [2, 4]$ para $(x, y) \in D$.

■

4.3.1 Ejercicios

1. Encuentre intuitivamente los extremos absolutos de $f(x, y) = x + y$ en el círculo de radio 1 centrado en el origen.
2. Imagine una caja de base triangular, que se cubre con una tapa semiesférica. ¿Cuáles son los puntos más altos y más bajos de la tapa? Para fijar ideas, suponga que la base es el triángulo con vértices $(-1, 0), (1, 0)$ y $(0, \frac{3}{2})$, y que la tapa es la superficie $z = +\sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

4.4 Resolución de problemas con restricciones

En esta sección veremos primeramente un procedimiento general para calcular extremos o candidatos a extremos de una función de dos variables $f(x, y)$ cuando los pares (x, y) están “condicionados” o “restringidos” por algún “vínculo”, “ligadura” o “restricción” que relaciona las variables x e y . Ejemplos típicos de esta situación son: hallar las dimensiones de un rectángulo de área máxima con perímetro dado (digamos 120 cm), o determinar dos números cuya diferencia sea fija (digamos 100) y su producto sea mínimo. En el primer caso las variables son los lados b y h del rectángulo, la función a maximizar es el área $A(b, h) = bh$, y el vínculo entre las variables es que $2b + 2h = 120$ siendo b y h positivos; en el segundo caso se pide minimizar la función producto $P(x, y) = xy$ donde x e y son dos variables reales sujetas a la condición de que $|x - y| = 100$. Analizaremos también un problema similar para una función de tres variables $f(x, y, z)$ cuando las ternas (x, y, z) para las cuales se busca conocer los extremos de f , están restringidas por uno o por dos vínculos que relacionan las variables x, y, z .

El tipo de situaciones como el de calcular el área máximo de un rectángulo con perímetro dado, que involucra 2 variables, ha sido tratado en Análisis Matemático I apelando a una sustitución: a partir del vínculo entre las variables, despejar una de ellas en términos de la otra y reemplazar en la expresión de la función, que entonces pasa a depender de una sola variable. Por ejemplo: para hallar el área máxima de un rectángulo de perímetro 120 cm, lo que se hacía era despejar $h = h(b) = 60 - b$ a partir del vínculo, y luego optimizar $\mathcal{A}(b) = A(b, h(b)) = b(60 - b)$, en el intervalo $b \in [0, 60]$. Sin embargo, ese procedimiento requiere que se cumplan algunas hipótesis, como que se pueda despejar explícitamente una variable en términos de la otra, lo que no siempre es posible tal como se muestra en el siguiente caso.

■ **Ejemplo 4.4.1** ¿Cuáles son (si existen) los puntos de la curva plana $y^2 = x - 1$ que están más cerca y más lejos del origen de coordenadas? ¿A qué distancia están?

Sea $P(x, y)$ un punto de la curva. Se pide encontrar el mínimo y el máximo de $d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$ cuando $y^2 = x - 1$. Podemos trabajar con $f(x, y) = [d(O, P)]^2 = x^2 + y^2$ (que, por ser polinomial, es más sencilla de manipular que la función d), dado que un punto

estacionario de f corresponde al mismo punto estacionario para d .

La condición que deben satisfacer las coordenadas de los puntos que buscamos es $y^2 = x - 1$, luego si reemplazamos y^2 por $x - 1$ en $f(x, y)$, habría que optimizar la función $F(x) = x^2 + x - 1$.

Analicemos $F(x)$: tiene un (solo) punto crítico pues $F'(x) = 2x + 1$ se anula para $x = -\frac{1}{2}$; como $F''(-\frac{1}{2}) = 2 > 0$, se trata de un mínimo de $F(x)$. Dicho mínimo tiene el valor $F(-\frac{1}{2}) = -\frac{5}{4}$, lo que resulta absurdo ya que habíamos partido de una función que era una distancia al cuadrado.

Basta que grafique la parábola $x = y^2 + 1$ para descubrir que el punto más cercano al origen es el $(1, 0)$, a una unidad de distancia. Por otro lado, siempre se pueden encontrar puntos de la curva arbitrariamente alejados del origen. En conclusión, $d(O, P)$ es mínima y vale 1 para $P(1, 0)$, pero no tiene valor máximo. ■

La técnica gráfica dio la respuesta correcta en este caso. Pero, ¿qué es lo que falló en el tratamiento analítico? Entre otras cosas, no tuvimos en cuenta que $y^2 = x - 1$ tiene sentido sólo para $x \geq 1$. Veremos una técnica analítica adecuada para resolver problemas de optimización con vínculos (o condiciones, ligaduras, o restricciones), conocida como *método de los multiplicadores de Lagrange*.

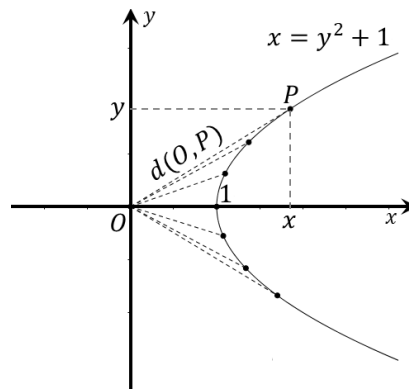


Figura 4.4.1: Gráfica de la curva $y^2 = x - 1$.

4.4.1 Método de los multiplicadores de Lagrange: función de 2 variables y 1 vínculo

Volvamos al Ejemplo 4.3.1 de la Sección 4.3, donde se resolvió gráfica e intuitivamente la búsqueda de los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2$ en el círculo de radio 1 centrado en el origen. De acuerdo al teorema de extremos absolutos para funciones continuas en conjuntos cerrados y acotados, y siguiendo el método indicado, la discusión se dividió en tres pasos:

- (1) hallar y clasificar los puntos críticos de f en el interior del círculo,
- (2) hallar extremos locales de f en la circunferencia borde, y
- (3) comparar los valores de f en todos los candidatos a extremos.

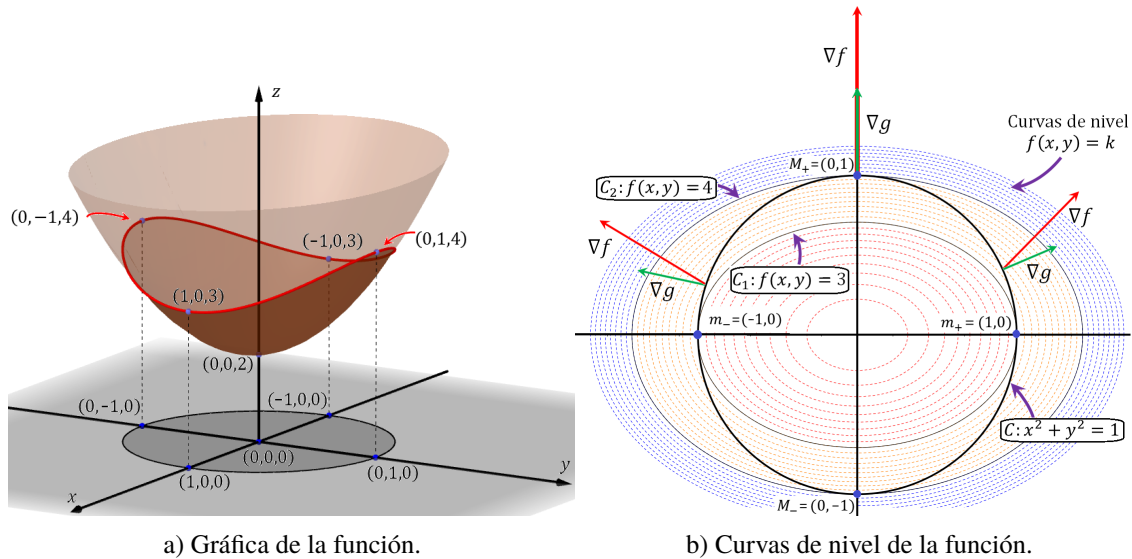
Veamos ahora un método analítico para tratar el ítem (2).

La Figura 4.4.2 a) corresponde a la gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2$ en el espacio, y fue útil para discutir cuáles son los puntos más bajos y más altos de la superficie gráfica de f que están justo por encima de la circunferencia C dada por $x^2 + y^2 = 1$.

La Figura 4.4.2 b) corresponde a un mapa de contornos de la misma función f en el plano, y contiene varias curvas de nivel de f (elipses de ecuación $x^2 + 2y^2 + 2 = k$, con $k \geq 2$). Se indica en el mismo gráfico la curva “condicionante” (la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$). Es claro que hay una curva de nivel que pasa también por puntos de la circunferencia y que tiene el valor más chico de $k = k_{\min} = 3$ (las curvas de nivel punteadas en rojo con k menores que 3 no cortan a la circunferencia, indicando que no se satisface el vínculo en ningún punto de las elipses “más chicas”); además es evidente que existe una curva de nivel que pasa también por puntos de la circunferencia y que tiene el valor más grande de $k = k_{\max} = 4$ (las curvas de nivel punteadas

en azul con k mayores no intersecan a la circunferencia, dando cuenta de que no se satisface la restricción en ningún punto de las elipses “más grandes”). Entre las curvas de nivel C_3 y C_4 se muestran en la figura las curvas (en naranja) de nivel intermedio, que se ve que cortan a la curva C en varios puntos.

Observemos con atención los puntos de intersección de la curva de nivel C_3 con la curva vinculante C , y de la curva de nivel C_4 con la curva vinculante C . Para fijar ideas tomemos por ahora C_4 y C : en los puntos de intersección, que vemos que son $M_+(0, 1)$ y $M_-(0, -1)$, estas dos curvas se tocan en forma tangente. Ello significa que si tomamos en M_+ un vector tangente a cada curva, estos vectores serán colineales entre sí; lo mismo ocurre para M_- . Deducimos entonces que, en los puntos M_{\pm} , vectores perpendiculares a una y otra curva serán colineales entre sí.



a) Gráfica de la función.

b) Curvas de nivel de la función.

Figura 4.4.2: La función $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2$ para (x, y) en la circunferencia C dada por $x^2 + y^2 = 1$, tiene mínimos de valor 1 en $(\pm 1, 0)$, y máximos de valor 2 en $(0, \pm 1)$. A modo de ejemplo, se muestra $\vec{\nabla} f$ en el punto $M_+(0, 1)$, que resulta perpendicular en dicho punto tanto a la curva de nivel C_2 de f como a la curva condicionante C .

Sabemos cómo hallar un vector perpendicular a la curva de nivel C_4 de f en un punto: usando el gradiente de la función f , evaluado en el punto. Así, tenemos que $\vec{\nabla} f(0, 1) = (0, 4)$ es un vector perpendicular a C_4 en $M_+(0, 1)$. Si la curva C fuera una curva de nivel de alguna otra función, podríamos hacer lo mismo. Definamos entonces una *función auxiliar*, dada por

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$$

de tal forma que la curva de nivel 0 de g reproduce la curva vinculante C (como función auxiliar sirve también $\tilde{g}(x, y) = x^2 + y^2$, pero entonces el vínculo correspondería a la curva de nivel 1 de \tilde{g}). Así, tenemos que $\vec{\nabla} g(0, 1) = (0, 2)$ es un vector perpendicular a C en $M_+(0, 1)$. Se confirma entonces que el punto de intersección M_+ entre C_4 y C es un punto de tangencia, pues los vectores gradiente hallados son colineales, siendo un vector *múltiplo* del otro: $\vec{\nabla} f(0, 1) = \lambda \vec{\nabla} g(0, 1)$ con $\lambda = 2$. Mostrar que algo similar ocurre para el punto M_- .

De igual manera, en cada punto de intersección entre C_3 y C los vectores $\vec{\nabla} f(\pm 1, 0) = (\pm 2, 0)$ y $\vec{\nabla} g(\pm 1, 0) = (\pm 2, 0)$ son colineales. De hecho, se trata del mismo vector; en este caso el factor de proporcionalidad o “multiplicador” es $\lambda = 1$.

- Ⓒ Se puede ver que las curvas de nivel entre C_3 y C_4 (esto es, para valores de k intermedios entre 3 y 4) cortan también a la curva vinculante C pero NO de manera tangente. Esto es un indicio de que ese k es intermedio, y no el menor o mayor posible compatible con el vínculo.

- C** Cuando hablamos de colinealidad entre los vectores gradiente, se debe tener cuidado de que ninguno de ellos sea el vector nulo. Habrá que chequearlo en cada ejercicio. Para el ejemplo tratado aquí, $\vec{\nabla}g(x, y) = (2x, 2y)$ se anula solamente en el punto $(0, 0)$, pero como éste no satisface el vínculo (la curva condicionante C no pasa por el origen), se puede proceder sin problema. Por otro lado, $\vec{\nabla}f(x, y) = (2x, 4y)$ sólo se anula en $(0, 0)$; este es el único punto estacionario de f , queda dentro del círculo (se estudió aparte), pero no pertenece a la frontera.



Con el siguiente recurso se puede explorar una situación similar al ejemplo anterior pero para determinar los extremos de la función $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 1$ sobre la elipse $(x - 1)^2 + \frac{(y - 1)^2}{4} = 1$.

<https://ggbm.at/g8jhPvRE>

Ejercicio Intente reproducir el mismo razonamiento (analizando curvas de nivel) para el problema del área máxima de un rectángulo con perímetro dado. Considere $f(x, y) = xy$, con el vínculo $g(x, y) = x + y - 60 = 0$. Tenga en cuenta que sólo debe trabajar en el primer cuadrante, ya que x e y deben ser positivos en este problema. ¿Cuánto vale el múltiplo entre los gradientes de ambas funciones en el punto candidato a máximo?

En la discusión anterior hemos establecido una justificación para el siguiente teorema, que da una *condición necesaria* (aunque no suficiente) para la existencia de un extremo restringido de una función:

Teorema 4.4.1 – Teorema de Lagrange (2 variables y 1 restricción). Sean $f(x, y)$ y $g(x, y)$ funciones de dos variables de clase C^1 , y tales que f tiene un extremo en el punto (x_L, y_L) que pertenece a la curva suave dada por $g(x, y) = 0$, o sea

$$g(x_L, y_L) = 0.$$

Si $\vec{\nabla}g(x_L, y_L) \neq \vec{0}$, entonces existe un número real λ (denominado *multiplicador de Lagrange*) tal que

$$\vec{\nabla}f(x_L, y_L) = \lambda \vec{\nabla}g(x_L, y_L).$$

Este teorema nos dice que los puntos (x, y) tales que $g(x, y) = 0$ y $\vec{\nabla}g(x, y) \neq \vec{0}$ que NO cumplen el sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \end{cases}$$

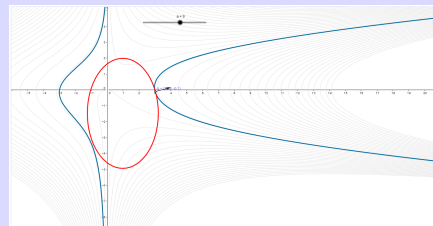
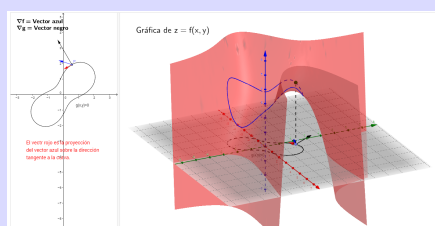
para algún número real λ , NO tienen posibilidades de ser extremos de $f(x, y)$ restringida al vínculo $g(x, y) = 0$. Ver la Figura 4.4.2 b) que los vectores $\vec{\nabla}f$ y $\vec{\nabla}g$ dibujados en el primer y segundo cuadrante, no son colineales; luego no puede haber ahí extremos condicionados.



En los siguientes recursos se puede explorar en forma genérica y dinámica cómo es la relación entre los vectores $\vec{\nabla}f$ y $\vec{\nabla}g$ en cada punto de la curva $g(x, y) = 0$. El primero es en un sistema 3D, el segundo es mediante la exploración de las curvas de nivel en 2D.

<https://ggbm.at/GkgZG3Vm>

<https://ggbm.at/DuHFRWgu>



Finalmente, damos el método para calcular en forma analítica los candidatos a valores extremos de una función de dos variables sujeta a una restricción:

Método de los multiplicadores de Lagrange (2 variables, 1 restricción)

Suponiendo que $f(x, y)$ tiene un extremo sujeto a la restricción $g(x, y) = 0$, siendo f y g de clase C^1 , para buscar los candidatos a extremos condicionados f se procede de la siguiente forma:

i) encontrar la o las soluciones del sistema de 2 + 1 ecuaciones

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

y verificar para cada punto solución que $\vec{\nabla}g$ es un vector no nulo;

ii) encontrar, si existen, el o los puntos (x, y) que satisfacen $g(x, y) = 0$ y que cumplen $\vec{\nabla}g(x, y) = \vec{0}$.

- C** Se debe resolver en el paso i) un sistema (no lineal, en general) de 3 ecuaciones con 3 indeterminadas, que puede tener una o más soluciones. Sin embargo, no todas las soluciones del sistema de ecuaciones corresponden a extremos restringidos de f (la colinealidad de los gradientes es condición necesaria pero no suficiente).

Cuando el vínculo determina una región cerrada y acotada, es posible evaluar f en cada una de las soluciones obtenidas y comparar los valores funcionales. El menor valor será el mínimo condicionado y el mayor valor será el máximo condicionado de f bajo la ligadura $g(x, y) = 0$. Por otro lado, si la solución consiste de un único punto o el vínculo no determina una región cerrada y acotada, se debe inspeccionar la función en puntos de su entorno (que satisfagan la ligadura) para justificar si se trata localmente de un mínimo o un máximo condicionado, o de un punto de ensilladura.

Ejercicio Aplique el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar los extremos de la función del Ejemplo 4.3.1 de la Sección 4.3 en la circunferencia unidad centrada en el origen, y muestre analíticamente el resultado. ¿Coincide con lo obtenido antes por métodos gráficos?

4.4.2 Método de los multiplicadores de Lagrange: función de 3 variables y 1 vínculo

La técnica vista en la subsección anterior también puede aplicarse a la optimización de una función de tres variables $f(x, y, z)$ sujeta a una restricción o vínculo de la forma $g(x, y, z) = 0$. Adapte el Teorema de Lagrange y el Método de los multiplicadores a este caso, planteando el sistema de 3 + 1 ecuaciones a resolver ahora. Piense en la justificación del teorema: la superficie de nivel k para f y la superficie condicionante de nivel 0 para g se intersectan en un punto y lo hacen ahí de manera tangencial. Esto se evidencia en la colinealidad de los vectores gradiente de f y de g en el punto de tangencia (x_L, y_L, z_L) , entonces existe un múltiplo λ , si $\vec{\nabla}g \neq 0$, tal que

$$\vec{\nabla}f(x_L, y_L, z_L) = \lambda \vec{\nabla}g(x_L, y_L, z_L)$$

además del hecho de que $g(x_L, y_L, z_L) = 0$. Interprete gráficamente.

- **Ejemplo 4.4.2** Encuentre la distancia más corta del punto $A(2, -2, 3)$ al plano de ecuación $6x + 4y - 3z = 2$.

Sea $P(x, y, z)$ un punto del plano dado. Se pide encontrar el menor valor de $d(A, P) = \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2}$ cuando $6x + 4y - 3z = 2$. Antes de hacer ningún cálculo,

conviene verificar que A no pertenece al plano, porque en tal caso la respuesta sería trivial (verifique)

Para facilitar el cómputo definimos la función

$$f(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2$$

que es el cuadrado de la distancia $d(A, P)$, pues un mínimo de f también es un mínimo de d . Las coordenadas del punto P deben satisfacer la ecuación del plano, dicho de otra forma están vinculadas por la ecuación $6x + 4y - 3z - 2 = 0$, por lo cual definimos la función auxiliar

$$g(x, y, z) = 6x + 4y - 3z - 2.$$

El gradiente de g es no nulo en todo \mathbb{R}^3 . La superficie de nivel 0 de g es justamente el plano dado. Como función auxiliar sirve también $\tilde{g}(x, y, z) = 6x + 4y - 3z$, pero entonces el vínculo correspondería a la superficie de nivel 2 de \tilde{g} .

Tenemos entonces todos los elementos para aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} 2(x - 2) = \lambda 6 \\ 2(y + 2) = \lambda 4 \\ 2(z - 3) = \lambda (-3) \\ 6x + 4y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

Para resolver este sistema, es conveniente en este caso despejar x, y, z de las 3 primeras ecuaciones en términos de λ , y ponerlos en la cuarta ecuación, que quedará solamente en función del multiplicador de Lagrange. Se tiene: $x = 3\lambda + 2$, $y = 2\lambda - 2$, $z = -\frac{3}{2}\lambda + 3$, respectivamente; luego reemplazando en la cuarta ecuación queda

$$6(3\lambda + 2) + 4(2\lambda - 2) - 3\left(-\frac{3}{2}\lambda + 3\right) - 2 = 0$$

que tiene solución (única) $\lambda = \frac{14}{61}$. Luego el punto buscado es $P_L\left(\frac{164}{61}, -\frac{94}{61}, \frac{162}{61}\right)$ (verifique

que efectivamente pertenece al plano), y está a una distancia $d_L = \frac{\sqrt{62941}}{61} \simeq 4.11$ del punto A .

La respuesta al ejercicio no está completa aún: falta justificar que P_L , que es la única solución hallada, es efectivamente el punto del plano más cercano (a menor distancia), y no el más lejano, a A . Un gráfico nos convencerá de ello (o elegir otro punto cualquiera que satisfaga el vínculo, o sea que esté sobre el plano dado, y ver que su distancia a A es mayor que d_L). ■

4.4.3 Método de los multiplicadores de Lagrange: función de 3 variables y 2 vínculos

La técnica de Lagrange se puede extender a la optimización restringida de funciones de n variables con m vínculos (siendo $m < n$).

Mencionaremos aquí el caso de tener que optimizar una función f de tres variables x, y, z las cuales no pueden variar libremente sobre todo el dominio de f sino que están vinculadas por dos restricciones, que escribiremos de manera genérica como $g(x, y, z) = 0$ y $h(x, y, z) = 0$. Se puede mostrar que la condición necesaria que da el Teorema de Lagrange en este caso, es que el vector gradiente de f pertenezca al plano determinado por los gradientes de g y de h (siendo éstos dos vectores no nulos, ni colineales entre sí). Esto se escribe como una combinación lineal, donde los coeficientes son ahora dos multiplicadores de Lagrange.

Método de los multiplicadores de Lagrange (3 variables, 2 restricciones)

Suponiendo que $f(x, y, z)$ tiene un extremo condicionado de f sujeto a las restricciones $g(x, y, z) = 0$ y $h(x, y, z) = 0$, siendo f, g y h de clase C^1 , para buscar los candidatos a extremos se procede de la siguiente forma:

- i) encontrar la o las soluciones del sistema de 3 + 2 ecuaciones

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z) + \mu h_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z) + \mu h_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z) + \mu h_z(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

y verificar para cada punto solución que $\vec{\nabla}g$ y $\vec{\nabla}h$ son vectores no nulos y no colineales entre sí;

- ii) encontrar, si existen, el o los puntos (x, y, z) que satisfacen $g(x, y, z) = 0, h(x, y, z) = 0$ y que cumplen $\vec{\nabla}g(x, y, z) = \vec{0}$ o $\vec{\nabla}h(x, y, z) = \vec{0}$ o $\vec{\nabla}g \times \vec{\nabla}h = \vec{0}$.

Un ejemplo típico de optimización con dos vínculos es el siguiente:

Ejercicio La función $T(x, y, z) = 100 + x^2 + y^2$ representa la temperatura en cada punto de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 50$. Hallar la temperatura máxima en la curva intersección de dicha superficie esférica con el plano $x = z$.

Estudie el problema, definiendo funciones auxiliares g y h convenientes, y plantee el sistema de ecuaciones a resolver.



En el siguiente recurso se puede explorar la relación entre los gradientes de las funciones intervinientes del ejercicio anterior.

<https://ggbm.at/TZkNndXA>

4.4.4 Aplicación al cálculo de extremos en una región cerrada y acotada

Concluimos este capítulo presentando la solución completa al problema de hallar los extremos absolutos de una función continua de dos variables en un recinto cerrado y acotado, como vimos en la Sección 4.3 utilizando ahora el método de los multiplicadores de Lagrange. La existencia de extremos absolutos está garantizada por el Teorema 4.3.1. Combinaremos lo estudiado sobre candidatos a extremos libres en el interior de la región y a extremos condicionados en la frontera del recinto.

- **Ejemplo 4.4.3** Encontrar los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 3x + 4y$ en el círculo de radio 1 centrado en el origen.

De acuerdo al teorema de extremos absolutos para funciones continuas en conjuntos cerrados y acotados, y siguiendo el método indicado en la Sección 4.1.1, dividimos la resolución en tres pasos: (1) hallar y clasificar los puntos críticos (estacionarios o no) de f en el interior del círculo, (2) hallar extremos locales de f en la circunferencia borde, y (3) comparar los valores de f en todos los candidatos a extremo.

- i) Al ser f diferenciable, los únicos puntos críticos deben ser puntos estacionarios, en los que se anulan ambas derivadas parciales simultáneamente. Pero $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4$, para todo (x, y) dentro del círculo unidad. Esto significa que f no tiene puntos críticos (no los tiene, de hecho en todo \mathbb{R}^2), que por supuesto era lo esperado

ya que la gráfica de f es un plano no horizontal. En consecuencia, los extremizadores de f estarán necesariamente en la frontera de la región circular.

- ii) La curva frontera, la circunferencia de radio 1 centrada en $(0, 0)$, establece un vínculo entre las variables x e y . Aplicamos entonces el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar los candidatos a extremos locales de f en la circunferencia borde. O sea, buscamos los extremos de $f(x, y) = 3x + 4y$ sujetos a $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Para aplicar el método verificamos que $\vec{\nabla}g = (2x, 2y)$ sólo se anula en $(0, 0)$, que no pertenece a la circunferencia borde. Podemos entonces proceder, resolviendo el siguiente sistema de 2 + 1 ecuaciones:

$$\begin{cases} 3 = \lambda 2x \\ 4 = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Análogamente a como hicimos en el Ejemplo 4.4.2, despejamos x e y en función de λ de las primeras dos ecuaciones, y lo llevamos a la tercera. Dado que λ no puede ser 0, se tiene $x = \frac{3}{2\lambda}$, $y = \frac{2}{\lambda}$. Si reemplazamos en la última ecuación del sistema, queda

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 - 1 = 0.$$

Resolviendo para λ obtenemos

$$\lambda = \pm \frac{5}{2}.$$

Con lo cual, si $\lambda = +\frac{5}{2}$ se tiene $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{4}{5}$; y si $\lambda = -\frac{5}{2}$ se tiene $x = -\frac{3}{5}$, $y = -\frac{4}{5}$.

Por lo tanto, los puntos buscados son $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ y $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$.

- iii) Para finalizar calculamos el valor de $f(x, y)$ en todos los puntos candidatos a extremos absolutos de f . En este caso, como f no tiene puntos críticos y por ende tampoco extremos locales en el interior del círculo, sólo debemos mirar los valores de f en los posibles extremos locales sobre la circunferencia borde, es decir:

$$f\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 5, \quad f\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = -5$$

Por lo tanto, en el círculo unidad la función f alcanza su valor máximo absoluto en el punto $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ donde f vale 5 y su valor mínimo absoluto en el punto $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ donde f vale -5.

Desarrolle el método gráfico, tanto por medio de la gráfica de f en el espacio como por medio de un mapa de contornos en el plano, y compruebe el resultado analítico hallado. ■

Veamos cómo proceder cuando la región está delimitada por una curva suave a trozos:

- **Ejemplo 4.4.4** Supongamos que queremos encontrar los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 3x + 4y$ pero esta vez en cierta porción del círculo de radio 1 centrado en el origen. Consideramos \overline{D} , el sector circular del primer cuadrante, que está comprendido entre el eje x y la recta $y = \sqrt{3}x$, incluyendo sus bordes.

Como ya analizamos en el ejemplo anterior, f no tiene puntos críticos, por lo que no tendrá extremos locales en el interior de \overline{D} . Buscamos ahora los extremos locales en la frontera \overline{D} . En este caso la frontera es una curva suave a trozos, que consta de tres tramos

suaves. Analicemos cada tramo por separado:

- a) la porción del eje x que va desde el origen al punto $(1, 0)$;
- b) el arco de circunferencia que va desde el punto $(1, 0)$ hasta el punto en el que la recta $y = \sqrt{3}x$ corta en el primer cuadrante a la circunferencia, que sale de resolver $x^2 + y^2 = 1, y = \sqrt{3}x$ con $x, y > 0$, esto es $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$;
- c) el segmento de recta comprendido entre dicho punto y el origen. A los puntos inicial y final de cada tramo los trataremos por separado (como se hacía con los bordes de un intervalo cerrado en Análisis Matemático I).

La función f sobre el tramo a) se reduce a $f(x, 0) = 3x$, con $0 < x < 1$, que no tiene extremos locales. Sobre el tramo c), f adopta la forma $f(x, \sqrt{3}x) = (3 + 4\sqrt{3})x$, con $0 < x < \frac{1}{2}$, que tampoco presenta extremos locales. Falta ver si f tiene extremos locales en el arco de circunferencia b), para lo cual usamos el método de Lagrange.

Según vimos en el ejemplo anterior la función f tiene extremos locales sujetos al vínculo dado por la circunferencia, en $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ y $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$. Como este último punto no está en \bar{D} , nos queda solamente $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ como un candidato a ser extremo de f en este problema.

Finalmente incluimos también como candidatos a ser extremos de f a los puntos inicial y final de cada tramo de la curva frontera de \bar{D} .

Por lo tanto, debemos comparar los valores que tome f en: $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}), (0, 0), (1, 0)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Los valores de f en estos puntos son $f(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = 5, f(0, 0) = 0, f(1, 0) = 3, f(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{2} + 2\sqrt{3} \approx 4.96$. Por lo tanto, $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ es el máximo absoluto de f en \bar{D} y $(0, 0)$ es el mínimo absoluto de f en \bar{D} . ■

4.4.5 Ejercicios

1. Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = e^{xy}$, con la restricción $x^2 + y^2 = 16$.
2. Halle los puntos de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que están a mayor y menor distancia del punto $(\sqrt{3}, 0, 1)$.
3. Encuentre los puntos sobre la superficie $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, donde la función $f(x, y, z) = x + y + z$ toma los valores máximo y mínimo.
4. Considere la función del Ejemplo 4.1.4 $f(x, y) = x^2 - y^2$, que no posee extremos en \mathbb{R}^2 . ¿Ocurre lo mismo si el dominio se restringe a una región cerrada y acotada del plano, digamos a un círculo centrado en el origen? Presente argumentos gráficos. Luego formalice analíticamente planteando las ecuaciones a resolver y comente cuál es la respuesta que espera obtener.
5. Determine analíticamente todos los extremos absolutos de la función $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ en la región rectangular $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$

4.5 Anexo A. Puntos críticos y estacionarios de una función de n variables

Damos a continuación la definición de punto crítico y punto estacionario de una función escalar de n variables, que extiende el concepto visto para funciones de 2 variables.

Definición Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Un punto (x_1, x_2, \dots, x_n) perteneciente al dominio de f es un *punto crítico* de f si:

- las m derivadas parciales primeras de f se anulan en (x_1, x_2, \dots, x_n) , ó
- al menos una de las derivadas parciales primeras de f no existe en (x_1, x_2, \dots, x_n) .

En el primer caso (o sea, cuando el gradiente de f en el punto es el vector nulo), se dice que (x_1, x_2, \dots, x_n) es un *punto estacionario* de f .

■ **Ejemplo 4.5.1** La función $f(x, y, z) = x^2 + \sqrt{y} + \sin z$ tiene (infinitos) puntos críticos, de la forma $(x_c, 0, z_c)$, esto es, todos los puntos del plano xz pues no existe $\frac{\partial f}{\partial y}$ para $y = 0$.

La función $f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ tiene un (único) punto estacionario, el $(0, 0, 0, 0)$, donde las 4 derivadas parciales se anulan. ■

4.6 Anexo B. Justificación de criterios de las derivadas segundas

Criterio de la derivada segunda para una función de una variable

Sea $F(x)$ una función dos veces derivable en x_0 , y x_0 un punto estacionario de F , esto es: $F'(x_0) = 0$. Aproximando la función alrededor de x_0 mediante polinomios de Taylor, de segundo orden se tiene: $F(x) \approx P_2(x) = F(x_0) + 0(x - x_0) + \frac{1}{2}F''(x_0)(x - x_0)^2$ para x próximos a x_0 . Gráficamente la expresión de la derecha corresponde, en el caso en que el coeficiente del término cuadrático sea distinto de 0, a una *parábola* con ramas hacia arriba o hacia abajo dependiendo del signo de ese coeficiente. Dado que el polinomio de Taylor es una buena aproximación de la función en el entorno del punto donde está centrado, podemos confiar en que la gráfica de F será localmente muy parecida a una parábola e inmediatamente identificamos de qué tipo de extremo se trata conociendo el *signo de la derivada segunda en el punto estacionario*: si $F''(x_0) > 0$, x_0 es un mínimo local de F ; mientras que si $F''(x_0) < 0$, x_0 es un máximo local de F . ¿Qué se puede decir en el caso en que el coeficiente del término cuadrático es igual a 0? A este orden de aproximación no mucho, salvo que localmente la gráfica de la función es “muy chata”, lo que no permite decidir si se trata de un extremo máximo o mínimo, o de un punto de inflexión; habría que “ir más allá” de la derivada segunda (aproximar F con P_3 ó P_4), o inspeccionar con otro método la función para clasificar ese punto estacionario.

Criterio de las derivadas parciales segundas para una función de dos variables

La justificación se basa también en el desarrollo de Taylor de la función. La aproximación cuadrática de una función de dos variables agrega términos de orden 2 a la aproximación lineal (o linealización) de la función que vimos en el Capítulo 3; se puede probar que esos términos tienen como coeficientes las derivadas parciales segundas de la función, evaluadas en el centro del desarrollo. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en $(x_0, y_0) \in D$, y (x_0, y_0) un punto estacionario de f , esto es: $\vec{\nabla}f(x_0, y_0) = \vec{0}$. A segundo orden se tiene para (x, y) próximos a (x_0, y_0) :

$$f(x, y) \approx P_2(x, y) = f(x_0, y_0) + [0(x - x_0) + 0(y - y_0)] + \frac{1}{2} [f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2].$$

Por simplicidad supongamos que el punto estacionario es $(x_0, y_0) = (0, 0)$ y que $f(0, 0) = 0$, luego la expresión anterior queda en la forma

$$f(x, y) \approx P_2(x, y) = 0 + [0 + 0] + \frac{1}{2} [Ax^2 + 2Bxy + Cy^2]$$

donde llamamos $A = f_{xx}(0, 0)$, $B = f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$, $C = f_{yy}(0, 0)$ a los coeficientes del polinomio de segundo orden. Supongamos que $A \neq 0$, entonces el lado derecho se puede reescribir, completando cuadrados, como

$$\begin{aligned}
 P_2(x, y) &= \frac{A}{2} \left[\left(x^2 + 2\frac{B}{A}xy \right) + \frac{C}{A}y^2 \right] = \frac{A}{2} \left[\left(x + \frac{B}{A}y \right)^2 - \left(\frac{B}{A}y \right)^2 + \frac{C}{A}y^2 \right] \\
 &= \frac{A}{2} \left[\left(x + \frac{B}{A}y \right)^2 + \left(\frac{AC - B^2}{A^2} \right) y^2 \right]
 \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que sabemos que P_2 es una buena aproximación a f cerca del centro del desarrollo, en este caso el punto estacionario $(0, 0)$, las gráficas de $P_2(x, y)$ y de $f(x, y)$ estarán bastante “pegadas” para puntos cercanos a $(0, 0)$. Y entonces la pregunta es: ¿qué forma tiene la superficie gráfica del polinomio P_2 , o sea, $z = P_2(x, y)$? Tomando la última expresión, resulta

$$\frac{z}{A/2} = \left(x + \frac{B}{A}y \right)^2 + \left(\frac{AC - B^2}{A^2} \right) y^2$$

que tiene la forma de una superficie cuádrica (aunque no está puesta exactamente como en las formas canónicas que vimos en el Capítulo 1 para las cuádricas, donde aparecían las variables solas al cuadrado, lo que significaba que los ejes principales de la figura eran los ejes coordenadas x e y ; aquí la figura aparecerá girada respecto de esos ejes coordenados, pero lo que importa para la clasificación del punto estacionario es su forma). Puede verse que, de hecho, la superficie gráfica del polinomio de Taylor P_2 centrado en el origen (localmente muy parecida a la superficie gráfica de la función f) corresponde a un *paraboloide elíptico* cuando $AC - B^2 > 0$ (en este caso, los dos términos del lado derecho tienen igual signo), o a un *paraboloide hiperbólico* cuando $AC - B^2 < 0$ (en este caso, los términos cuadráticos tienen distinto signo). En el primer caso podemos agregar todavía que si $A > 0$ el paraboloide elíptico abre hacia arriba, mientras que si $A < 0$ abre hacia abajo. Por último, si fuera $A = 0$, en la expresión de $P_2(x, y)$ más arriba se puede hacer un tratamiento similar sacando C factor común en lugar de A y completar cuadrados para y ; se muestra también que la gráfica de P_2 es una cuádrica.

Finalmente, notando que $AC - B^2$ no es más que el Hessiano de f evaluado en el punto estacionario, y que A es la derivada segunda de f respecto de x dos veces en el punto estacionario, se completa la justificación del criterio cuando $\mathcal{D} \neq 0$.

4.7 Actividades integradoras y autoevaluación

4.7.1 Actividades integradoras

- Analice cuál de las dos afirmaciones siguientes es una *condición necesaria* y cuál es una *condición suficiente* para la existencia de un extremo relativo:
 - Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables. Sea $(x_0, y_0) \in D$ un máximo o mínimo local de f . Luego: a) si existen las derivadas parciales primeras de f en dicho punto, entonces $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \vec{0}$; ó b) al menos una de las derivadas parciales de f en (x_0, y_0) no existe.
 - Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables de clase C^2 en un disco centrado en (x_e, y_e) , siendo (x_e, y_e) un punto estacionario de f dentro de D , tal que $\vec{\nabla} f(x_e, y_e) = \vec{0}$. Sea $\mathcal{D}(x_e, y_e) = Hf(x_e, y_e)$ el valor del Hessiano de f en el punto crítico. Luego: si $\mathcal{D}(x_e, y_e) > 0$, entonces (x_e, y_e) es un extremo local de f .
- Discutan en pequeños grupos los siguientes ejercicios:
 - Stewart, *Cálculo: Trascendentes Tempranas*, pag. 947: Sección 14.7 – Ejercicios 3 y 4
 - Stewart, *Cálculo: Trascendentes Tempranas*, pag. 956: Sección 14.8 – Ejercicio 1
- Utilizando computadora, analice la gráfica y algunas curvas de nivel para estimar los valores máximos y mínimos locales y los puntos silla de la función $f(x, y) = x^3 - 3xy^4 - 2y^2$. Luego utilice los métodos analíticos vistos para hallar estos valores en forma precisa.
- Encuentre el valor de la función $f(x, y) = (x^2 + y)e^{y/2}$ en todos sus puntos de ensilladura y extremos locales, si posee.

5. Clasifique los puntos estacionarios de $f(x, y) = y^2 - x^3 - 6xy$.
6. Determine los puntos de la región triangular con vértices en $(0, 0)$, $(0, 6)$ y $(6, 0)$, para los cuales $h(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$ toma sus valores máximo y mínimo absolutos.
7. Utilizando computadora, grafique la circunferencia C de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ junto con varias curvas de la forma C_k de ecuaciones $y = k - x^2$ para distintos valores de $k \in \mathbb{R}$. Señale las curvas C_k que cortan en algún punto a la circunferencia. Distinga las C_k que tocan tangencialmente a C y estime a partir del gráfico los valores de k correspondientes, así como los puntos de contacto.
Por último, resuelva analíticamente el problema de hallar los extremos de la función $f(x, y) = x^2 + y$ sujetos a la restricción $x^2 + y^2 = 1$. Compare con la resolución gráfica.
8. Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar los valores máximo y mínimo de f sujetos a la restricción dada:
 - a) $f(x, y) = x^2y$ para $x^2 + y^2 = 1$
 - b) $f(x, y, z) = x + y + z$ para $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$
9. Un paquete en forma de caja rectangular se puede enviar por correo con un costo dado, si la suma de su longitud y el perímetro de una sección transversal perpendicular a la longitud es de 84 cm a lo sumo. Encuentre las dimensiones del paquete con máximo volumen que se puede enviar por correo a ese costo. (Averigüe cuáles son las categorías actualmente para envío de paquetes por correspondencia)
10. Mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, halle los valores máximo y mínimo de $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, sujetos a las restricciones $x + y + z = 1$, $x - y + 2z = 2$.

4.7.2 Autoevaluación

1. Defina extremo relativo para una función de dos variables.
2. Sea $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + y^2$ (con a y b fijos).
 - a) Suponiendo que $a \neq b^2$, verifique que $(0, 0)$ es un punto estacionario y clasifíquelo según los valores de a y b .
 - b) En el caso en que $a = b^2$, determine todos los puntos estacionarios de f .
3. Sea $T(x, y, z) = 273 + x^2 + y^2 + z^2$ la función que da la temperatura en cada punto de una región sólida, en grados Kelvin. Sea C la curva intersección del elipsoide S dado por $2x^2 + y^2 + z^2 = 2$, con el plano $z = y$.
 - a) Plantee y resuelva el problema de optimización de T para los puntos del elipsoide.
 - b) Plantee el método de los multiplicadores de Lagrange, que permita obtener los candidatos a extremo de T restringidos a la curva C .

5

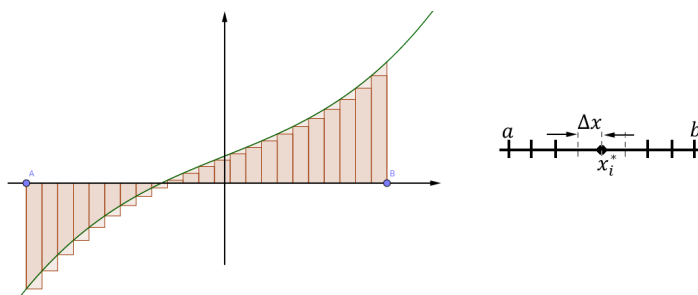
Integración de funciones escalares de varias variables

5.1	Integrales dobles	171
5.1.1	Integral doble en un rectángulo	171
5.1.2	Integral doble en una región plana general	177
5.1.3	Propiedades de las integrales dobles	180
5.1.4	Cambio de variables en integrales dobles	184
5.1.5	Aplicaciones de las integrales dobles	187
5.1.6	Ejercicios	189
5.2	Integrales triples	190
5.2.1	Integral triple en un prisma	190
5.2.2	Integral triple en una región sólida general	192
5.2.3	Cambio de variables en integrales triples	197
5.2.4	Aplicaciones de las integrales triples	199
5.2.5	Ejercicios	202
5.3	Integrales de línea	203
5.3.1	Integral de línea de una función escalar de dos o tres variables	204
5.3.2	Aplicaciones de las integrales de línea	210
5.3.3	Ejercicios	211
5.4	Integrales de superficie	211
5.4.1	Superficies paramétricas y funciones vectoriales de dos parámetros	211
5.4.2	Integral de superficie de una función escalar de tres variables	217
5.4.3	Aplicaciones de las integrales de superficie	219
5.4.4	Ejercicios	220
5.5	Anexo A. Tabla de primitivas	221
5.6	Anexo B. Integrales dobles y triples en otros sistemas de coordenadas	221
5.7	Actividades integradoras y autoevaluación	224
5.7.1	Actividades integradoras	224
5.7.2	Autoevaluación	225

Integración múltiple

En este capítulo estudiaremos la integral definida de una función de varias variables. Comenzaremos por la *integral doble* de una función de dos variables en una región en el plano, y la *integral triple* de una función de tres variables en una región sólida en el espacio. También vamos a considerar la *integral de línea* de una función de varias variables a lo largo de una curva en el plano o en el espacio, y por último la *integral de superficie* de una función de tres variables sobre una superficie en el espacio.

Antes de introducir los distintos tipos de *integrales múltiples*, recordemos la noción de integral definida de una función F (continua) de una variable en un intervalo $[a, b]$: $\int_a^b F(x) dx$. Cuando $F(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, esta integral da el valor del área bajo la curva $y = F(x)$ arriba del intervalo $[a, b]$. La integral puede definirse sin recurrir al concepto de área, mediante las sumas de Riemann. Para ello, comenzamos por dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos que, por simplicidad, tomamos de igual ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y los numeramos con $i = 1, 2, \dots, n$; en cada subintervalo elegimos un valor x_i^* de la variable x , y formamos la suma de Riemann como $S_n = \sum_{i=1}^n F(x_i^*) \Delta x$. Notar que, cuando F es positiva, esta expresión provee un valor aproximado para el área mencionada, usando rectángulos de base Δx y alturas $F(x_i^*)$.



Tomando el límite de las sumas de Riemann para un número n de subintervalos arbitrariamente grande (luego Δx se hace infinitesimalmente pequeño), se obtiene la integral definida de F en el intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(x_i^*) \Delta x.$$

Se prueba que el límite existe con la condición de que F sea continua en todo el intervalo, y que el resultado no depende de los valores x_i^* elegidos. Esta definición de integral es válida para funciones positivas o negativas. Extenderemos esta idea a funciones de varias variables.

5.1 Integrales dobles

En esta sección vamos a trabajar con integrales definidas para funciones de dos variables en regiones planas, llamadas integrales dobles.

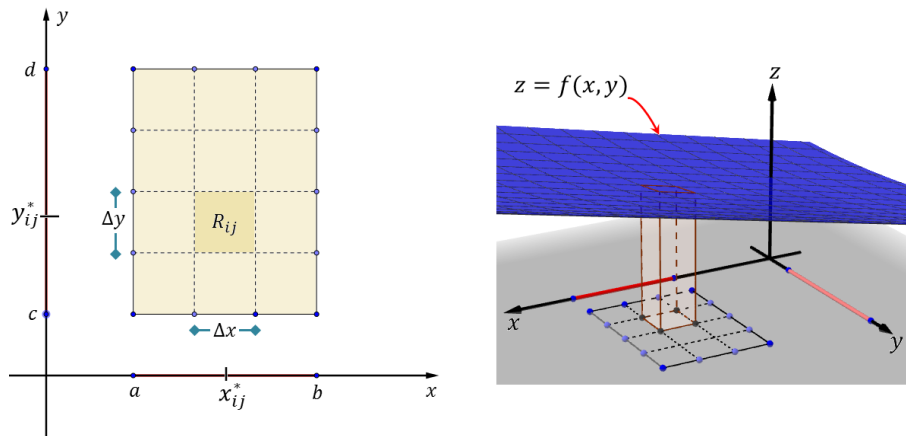
5.1.1 Integral doble en un rectángulo

Pensemos en una función de dos variables $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cuyo dominio es un rectángulo R con lados paralelos a los ejes coordenados. El rectángulo puede describirse como

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

o simplemente: $R = [a, b] \times [c, d]$.

Supongamos por ahora que $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in R$, de manera que la gráfica de f es una superficie en \mathbb{R}^3 que está arriba del rectángulo R . Consideremos la región sólida de \mathbb{R}^3 limitada por: el rectángulo R (como “piso”), los cuatro planos verticales $x = a$, $x = b$, $y = c$ e $y = d$ (como “paredes”), y la superficie gráfica de f (como “techo”). Queremos hallar el volumen bajo la superficie $z = f(x, y)$, arriba del rectángulo R .



Podemos obtener una aproximación al volumen, procediendo de la siguiente forma. Comenzamos por dividir el rectángulo R en subrectángulos, para lo cual dividimos los intervalos de cada variable: el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos numerados con $i = 1, \dots, n$ de igual ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, y el intervalo $[c, d]$ en m subintervalos numerados con $j = 1, \dots, m$ de ancho $\Delta y = \frac{d-c}{m}$; luego R queda dividido en nm subrectángulos, que llamaremos R_{ij} , cada uno de área $\Delta A = \Delta x \Delta y$. En cada subrectángulo elegimos un punto (x_{ij}^*, y_{ij}^*) , y formamos la suma doble de Riemann

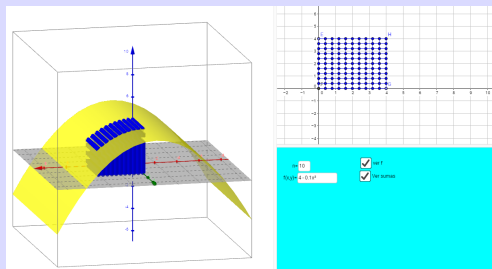
$$S_{nm} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A.$$

Notar que, cuando f es positiva, esta expresión provee un valor aproximado para el volumen mencionado, usando prismas de base ΔA y alturas $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$.



En el siguiente recurso se puede visualizar cómo son los subintervalos que servirán para la definición de integral doble.

<https://ggbm.at/uCcBQvzz>



- Ejemplo 5.1.1** Estimar el volumen del sólido que se encuentra arriba del rectángulo $R = [0, 2] \times [-1, 1]$ y debajo del paraboloides elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$. Para ello, dividir R en cuatro subrectángulos iguales y elegir el punto “de muestra” como la esquina superior derecha de cada subrectángulo R_{ij} . Graficar.

Para aproximar el volumen, dividimos el rectángulo R dividiendo los intervalos $[0, 2]$ para x y $[-1, 1]$ para y , en dos subintervalos cada uno del mismo ancho. R queda así dividido en 4 subrectángulos: R_{11} , R_{12} , R_{21} y R_{22} , cada uno de área $\Delta A = 1$. Luego, elegimos como punto “de muestra” la esquina superior derecha de cada subrectángulo, esto es: $(x_{11}^*, y_{11}^*) = (1, 0)$, $(x_{12}^*, y_{12}^*) = (2, 0)$, $(x_{21}^*, y_{21}^*) = (1, 1)$, $(x_{22}^*, y_{22}^*) = (2, 1)$.

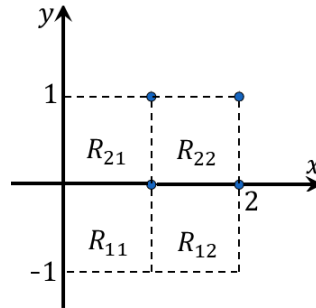


Figura 5.1.1: Puntos de “muestra” tomados en la esquina superior derecha de cada subrectángulo.

Verificamos que la función $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$ (cuya gráfica es un paraboloides) es positiva para todo punto de R , y finalmente calculamos la suma doble de Riemann con cuatro términos:

$$\begin{aligned} S_{22} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \\ &= f(1, 0) \Delta A + f(2, 0) \Delta A + f(1, 1) \Delta A + f(2, 1) \Delta A \\ &= 15 + 12 + 13 + 10 = 50. \end{aligned}$$

Con cuatro subrectángulos (y la elección hecha de puntos de muestra), entonces, la aproximación al volumen del sólido da: $V \approx 50$. Al aumentar el número de subdivisiones, tomando n y m cada vez más grandes, se espera que la aproximación mejore. Pruebe con $n = 4$, $m = 4$. ¿Qué aproximación al volumen del sólido obtuvo? (compare con el valor exacto del volumen, que es $V = 56$).

En este ejemplo, si tenemos en cuenta la simetría de la función, dado que $f(x, y) = f(x, -y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, observamos que el volumen del sólido sobre $[0, 2] \times [-1, 1]$ es el doble del volumen del sólido sobre $[0, 2] \times [0, 1]$. Podríamos haber trabajado entonces con este último rectángulo y luego hacer $V_{[0,2] \times [-1,1]} = 2 V_{[0,2] \times [0,1]}$. Utilice este resultado y aproxime el volumen pedido, calculando la suma de Riemann para f sobre $[0, 2] \times [0, 1]$ con cuatro subrectángulos. ■

Consideremos números n y m arbitrariamente grandes de subintervalos (luego Δx y Δy se hacen infinitesimalmente pequeños). Tomando el límite de las sumas dobles de Riemann se obtiene, cuando f es positiva, el volumen del sólido que se encuentra bajo la gráfica de f y arriba del rectángulo R :

$$V = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A.$$

Esta expresión induce la siguiente definición de integral doble de una función de dos variables en un rectángulo:

Definición La integral doble de una función de dos variables f en el rectángulo R se define como

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A,$$

si este límite existe.

Se puede demostrar que si f es una función continua en todo el rectángulo R , el límite existe y que el resultado no depende de los puntos de muestra elegidos. Esta definición es válida para funciones positivas o negativas. El resultado es un número real.

Integrales iteradas

Por lo visto en Análisis Matemático I, sabemos que evaluar una integral de una función de una variable utilizando la definición en base a sumas de Riemann es una tarea ardua y, en este sentido, el Teorema Fundamental del Cálculo proporciona un método más simple para calcularla. La evaluación de integrales dobles a partir de su definición es incluso más tediosa. Veamos una forma práctica que nos permitirá calcularlas.

Supongamos que $f(x, y)$ es una función continua de dos variables, definida en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Pensemos ahora en la siguiente integral $\int_c^d f(x, y) dy$. ¿Qué significa? Esta notación expresa que la variable x queda fija cuando $f(x, y)$ se integra con respecto a la variable y , que varía desde $y = c$ hasta $y = d$. Observemos que $\int_c^d f(x, y) dy$ da entonces una expresión que depende (solamente) de x . Si ahora integramos este primer resultado con respecto a la variable x , desde $x = a$ hasta $x = b$, se obtiene un número que escribimos así: $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$, donde se interpreta que el cálculo que figura entre paréntesis se realiza para x fijo. Esta expresión se conoce como *integral iterada* (iterar significa repetir, volver a hacer un proceso: en este caso la iteración consiste en hacer dos integrales simples sucesivas, integrando una vez y luego volviendo a integrar). Escribimos:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

donde queda indicado que primero integramos con respecto a y , desde c hasta d , y luego integramos con respecto a x , desde a hasta b .

De manera similar, tenemos la integral iterada

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

indicando que primero integramos con respecto a x , desde a hasta b , y luego integramos la expresión resultante con respecto a y , desde c hasta d .

■ **Ejemplo 5.1.2** Evaluar las siguientes integrales iteradas:

a) $\int_0^2 \left(\int_1^3 x^2 y dy \right) dx$; b) $\int_1^3 \left(\int_0^2 x^2 y dx \right) dy$.

a) En este caso, primero resolvemos $\int_1^3 x^2 y dy$, o sea que la variable x queda fija cuando $x^2 y$ se integra con respecto a la variable y , desde $y = 1$ hasta $y = 3$. Para ello, buscamos una primitiva y aplicamos la regla de Barrow:

$$\int_1^3 x^2 y dy = x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_{y=1}^{y=3} = x^2 \frac{3^2}{2} - x^2 \frac{1^2}{2} = 4x^2.$$

Ahora integramos esta expresión con respecto a la variable x , desde $x = 0$ hasta $x = 2$:

$$\int_0^2 4x^2 dx = 4 \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=2} = 4 \frac{2^3}{3} - 4 \frac{0^3}{3} = \frac{32}{3}.$$

Luego resulta

$$\int_0^2 \int_1^3 x^2 y dy dx = \frac{32}{3}.$$

b) En este caso, primero resolvemos $\int_0^2 x^2 y dx$, y después integramos la expresión resultante con respecto a y de 1 a 3. Escribimos ambos cálculos juntos:

$$\int_1^3 \left(\int_0^2 x^2 y dx \right) dy = \int_1^3 \left(\frac{x^3}{3} y \Big|_{x=0}^{x=2} \right) dy = \int_1^3 \left(\frac{8}{3} y \right) dy = \frac{8}{3} \frac{y^2}{2} \Big|_{y=1}^{y=3} = \frac{8}{3} \frac{3^2}{2} - \frac{8}{3} \frac{1^2}{2}.$$

Luego resulta

$$\int_1^3 \int_0^2 x^2 y dx dy = \frac{32}{3}.$$

■

Notamos que, en este ejemplo, se obtuvo la misma respuesta cuando integramos primero con respecto a y , que cuando integramos primero con respecto a x . El siguiente teorema indica efectivamente que, bajo ciertas condiciones, las integrales iteradas dan el mismo valor numérico en uno u otro sentido; es decir que el orden de integración no altera el resultado. Este teorema proporciona además un método para evaluar una integral doble expresándola como integral iterada (en cualquiera de los dos órdenes):

Teorema 5.1.1 – Teorema de Fubini para integrales dobles. Si $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en el rectángulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

En general el teorema de Fubini se satisface aún bajo condiciones más débiles: basta con suponer que la función f está acotada en R , que f es continua salvo quizás en un número finito de curvas suaves, y que existen las integrales iteradas.

El teorema de Fubini permite, entonces, calcular la integral doble de una función continua sobre un rectángulo mediante integrales iteradas, esto es, integrando con respecto a una variable cada vez, y además en cualquier orden de integración, lo que es muy conveniente como veremos en algunos ejemplos.

■ **Ejemplo 5.1.3** Calcular $\iint_R (16 - x^2 - 2y^2) dA$, donde $R = [0, 2] \times [-1, 1]$.

Para calcular la integral doble de la función continua $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$ en el rectángulo R utilizamos el teorema de Fubini, pudiendo elegir el orden de integración. Elegimos calcular las siguientes integrales iteradas:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \left(\int_{-1}^1 (16 - x^2 - 2y^2) dy \right) dx &= \int_0^2 \left[16y - x^2y - 2\frac{y^3}{3} \right]_{y=-1}^{y=1} dx \\
&= \int_0^2 \left[\left(16 - x^2 - \frac{2}{3} \right) - \left(-16 + x^2 + \frac{2}{3} \right) \right] dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{92}{3} - 2x^2 \right) dx = \left[\frac{92}{3}x - 2\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=2} \\
&= 56.
\end{aligned}$$

Calcule integrando primero respecto de la variable x , y verifique que se obtiene el mismo resultado, previsto por el Teorema 5.1.1.

Notamos que, dado que la función del integrando es positiva para todo $(x, y) \in [0, 2] \times [-1, 1]$, la integral hallada da el volumen del sólido debajo de la gráfica de f y arriba de R . Ver Ejemplo 5.1.1. ■

■ **Ejemplo 5.1.4** Calcular $\iint_R y \operatorname{sen}(xy) dA$, donde $R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \pi\}$.

Si integramos primero con respecto a la variable x , obtenemos

$$\begin{aligned}
\iint_R y \operatorname{sen}(xy) dA &= \int_0^\pi \int_1^2 y \operatorname{sen}(xy) dx dy \\
&= \int_0^\pi [-\cos(xy)]_{x=1}^{x=2} dy \\
&= \int_0^\pi [-\cos(2y) + \cos(y)] dy \\
&= \left[-\frac{1}{2} \operatorname{sen}(2y) + \operatorname{sen}(y) \right]_{y=0}^{y=\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Notar que para evaluar la integral en x , se considera fija a y ; luego, necesitamos una primitiva para una función del tipo $K \operatorname{sen}(Kx)$. En cambio, si hubiéramos integrado primero con respecto a la variable y , necesitábamos una primitiva para $y \operatorname{sen}(Cy)$, es decir una función de la forma polinomio por función trigonométrica, que requiere integración por partes. Claramente en este ejemplo conviene integrar primero con respecto a x . ■

■ **Ejemplo 5.1.5** Calcular el volumen del sólido en el primer octante encerrado por los planos coordenados, el plano $x = 3$, y el cilindro parabólico $z = 4 - y^2$. Esbozar el gráfico del sólido, e identificar la región de integración.

La base del sólido es el rectángulo delimitado por: $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 2$ (esta última desigualdad sale de imponer $z \geq 0$). El volumen puede obtenerse como la integral doble de la función $f(x, y) = 4 - y^2$ que resulta positiva en el rectángulo $R = [0, 3] \times [0, 2]$.

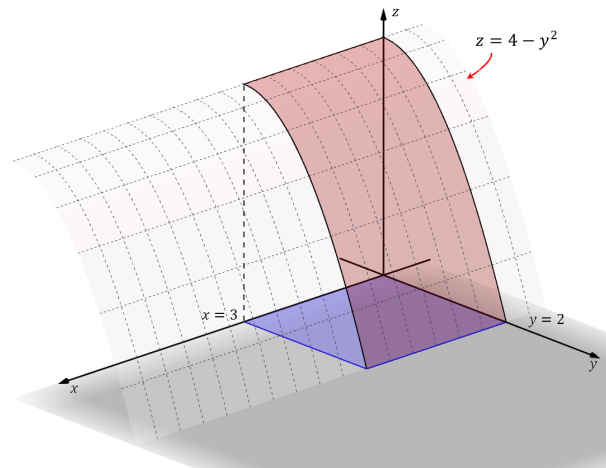


Figura 5.1.2: Sólido encerrado por los planos coordenados, el plano $x = 3$ y el cilindro $z = 4 - y^2$.

Si integramos primero con respecto a x , obtenemos

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_R (4 - y^2) dA = \int_0^2 \int_0^3 (4 - y^2) dx dy \\
 &= \int_0^2 (4 - y^2) x \Big|_{x=0}^{x=3} dy \\
 &= \int_0^2 (4 - y^2) 3 dy = \\
 &= 3 \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2} \\
 &= 16.
 \end{aligned}$$

Evalúe el volumen integrando primero con respecto a y . ¿Obtuvo el mismo valor? En este ejemplo, ambas integrales iteradas tienen el mismo grado de dificultad. ■

5.1.2 Integral doble en una región plana general

En el caso de la integral definida de una función de una variable, la región de integración es un intervalo de la recta real; pero para integrales dobles la situación es más rica y hay mayor variedad de regiones de integración para considerar. Hasta ahora estudiamos integración en un rectángulo R de \mathbb{R}^2 ; en esta subsección definiremos la integral doble en un conjunto plano D cualquiera.

Supongamos que D es una región acotada, luego existe un rectángulo R tal que $D \subset R$. Sea f una función con dominio D ; construimos entonces una nueva función \bar{f} , con dominio en todo el rectángulo R , de la siguiente forma:

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{si } (x, y) \in R - D \end{cases}$$

Entonces, si la integral doble de \bar{f} en R existe, definimos la integral de f en D como

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R \bar{f}(x, y) dA.$$

El lado derecho es una integral doble en un rectángulo, que ya sabemos calcular. Esta definición resulta razonable ya que $\bar{f}(x, y) = 0$ cuando (x, y) se encuentra fuera de D , y por lo tanto la integral sobre $R - D$ “no aporta nada”. Notemos que no importa el rectángulo R que consideremos, el único requisito es que R contenga a D .

Analicemos qué pasa cuando $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in D$. La integral doble $\iint_D f(x, y) dA$, ¿es el volumen del sólido E que se encuentra arriba de D y debajo de la gráfica de f ? Es fácil darse cuenta que sí. Observemos que $f(x, y) \geq 0$ en D implica que $\bar{f}(x, y) \geq 0$ en R . Luego $\iint_R \bar{f}(x, y) dA$ (integral de una función positiva, en un rectángulo) se interpreta como el volumen del sólido \bar{E} que se encuentra arriba de R y debajo de la gráfica de \bar{f} . Pero ambos sólidos tienen el mismo volumen: $V(E) = V(\bar{E})$.

En general, es posible que \bar{f} tenga discontinuidades en los puntos de la frontera de D (¿cuándo esto no ocurriría?, ¿cómo sería f en ese caso?). Sin embargo, si f es continua en D y además la frontera de D es una curva “bien comportada”, se puede demostrar que la integral doble de \bar{f} en R existe y por lo tanto $\iint_D f(x, y) dA$ existe. Estudiaremos a continuación regiones de integración D que tienen este “buen comportamiento”: las clasificaremos en regiones de tipo I y regiones de tipo II. Hay regiones del plano que son de ambos tipos o de un solo tipo, y otras que no son de ninguno de estos dos tipos. Veremos cómo proceder en cada caso.

Regiones planas de tipo I y de tipo II

- a) Una región plana es de tipo I si se encuentra entre dos curvas que son gráfica de sendas funciones continuas de la variable x , esto es:

$$D_I = \{(x, y) : a \leq x \leq b, Y_1(x) \leq y \leq Y_2(x)\}$$

donde Y_1 e Y_2 son funciones continuas para todo $x \in [a, b]$. Ver Figura 5.1.3.

Por ejemplo, la región del plano xy limitada por las curvas $y = x$, $y = x^2$ y las rectas verticales $x = 3$ y $x = 4$, es una región de tipo I; ¿en qué intervalo de x ? Un círculo de radio 1 centrado en el origen, es una región de tipo I en el intervalo $[-1, 1]$; ¿cuáles son las funciones $Y_1(x)$ e $Y_2(x)$? La región encerrada entre dos circunferencias concéntricas centradas en el origen con radios 1 y 2, respectivamente, no es una región de tipo I; ¿por qué? La región encerrada entre el eje x y la función $Y(x) = [x]$ (función “parte entera”) en el intervalo $[1, 3]$, no es de tipo I, pero sí es unión de dos regiones de tipo I, ¿cuáles son? Dibuje las regiones dadas.

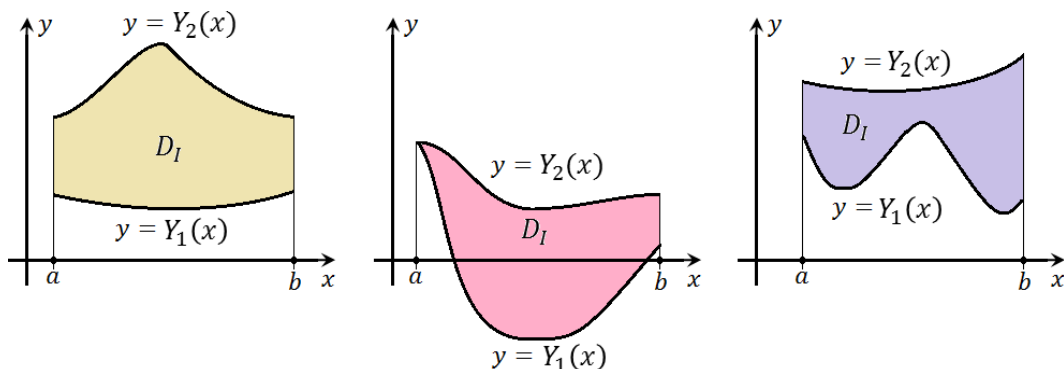


Figura 5.1.3: Algunos ejemplos de regiones planas de tipo I.

Supongamos que D es una región de tipo I, ¿cómo encaramos en este caso el cálculo de la integral doble en la región D ? Siguiendo la definición, elegimos un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ que contenga a D y luego definimos \bar{f} , que coincidirá con f en D y se anulará fuera de D . Por la definición, tenemos $\iint_D f(x, y) dA = \iint_R \bar{f}(x, y) dA$. Si aplicamos en el lado derecho el Teorema de Fubini, queda

$$\iint_R \bar{f}(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d \bar{f}(x, y) dy dx.$$

Ahora, tomando en cuenta que para cada x fijo del intervalo $[a, b]$ se tiene $\bar{f}(x, y) = 0$ si $y < Y_1(x)$ o si $y > Y_2(x)$, podemos escribir:

$$\int_c^d \bar{f}(x, y) dy = \int_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} \bar{f}(x, y) dy = \int_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} f(x, y) dy$$

donde usamos que $\bar{f}(x, y) = f(x, y)$ en D , o sea cuando $Y_1(x) \leq y \leq Y_2(x)$, con $a \leq x \leq b$. Finalmente, una integral doble en una región de tipo I se puede escribir, usando integrales iteradas, de la siguiente manera:

Definición — Integral doble en una región de tipo I. Sea $f : D_I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en una región D_I de tipo I,

$$D_I = \{(x, y) : a \leq x \leq b, Y_1(x) \leq y \leq Y_2(x)\}$$

donde Y_1 e Y_2 son funciones continuas para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$\iint_{D_I} f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

- b) Una región plana es de tipo II si se encuentra entre dos curvas que son gráfica de sendas funciones continuas de la variable y , esto es:

$$D_{II} = \{(x, y) : c \leq y \leq d, X_1(y) \leq x \leq X_2(y)\}$$

donde X_1 y X_2 son funciones continuas para todo $y \in [c, d]$. Ver Figura 5.1.4.

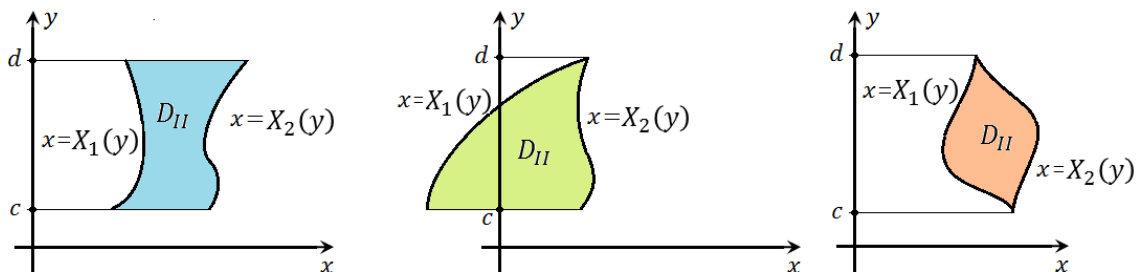


Figura 5.1.4: Algunos ejemplos de regiones planas de tipo II.

Procediendo de manera similar a como hicimos para una región de tipo I, en el caso de una región de tipo II se muestra lo siguiente:

Definición — Integral doble en una región de tipo II. Sea $f : D_{II} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en una región D_{II} de tipo II,

$$D_{II} = \{(x, y) : c \leq y \leq d, X_1(y) \leq x \leq X_2(y)\}$$

donde X_1 y X_2 son funciones continuas para todo $y \in [c, d]$, entonces

$$\iint_{D_{II}} f(x, y) dA = \int_c^d \left[\int_{X_1(y)}^{X_2(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

5.1.3 Propiedades de las integrales dobles

Sean f y g funciones de dos variables y supongamos que existen las integrales dobles

$$\iint_D f(x, y) dA \quad \text{y} \quad \iint_D g(x, y) dA$$

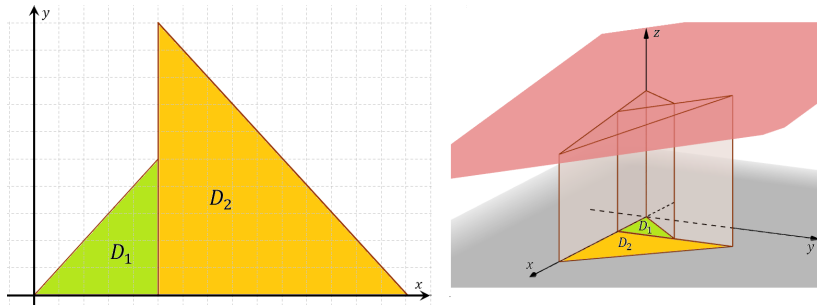
donde D es una región plana general. Entonces se cumple:

1. $\iint_D c f(x, y) dA = c \iint_D f(x, y) dA$, donde c es una constante real.

2. $\iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_D f(x, y) dA + \iint_D g(x, y) dA$

3. Si $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 no se intersecan salvo quizás en sus fronteras, entonces

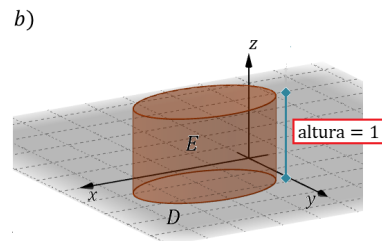
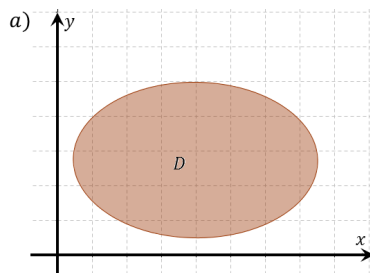
$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA$$



4. a) La integral doble de la función constante $f(x, y) = 1$ en una región D , da el valor del área de la región plana D :

$$A(D) = \iint_D 1 dA$$

- b) También se puede interpretar $\iint_D 1 dA$ como el valor del volumen del sólido $E_{D \times [0,1]}$ con base D y altura 1.



5. Si $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo $(x, y) \in D$, entonces:

$$\iint_D f(x, y) dA \geq \iint_D g(x, y) dA$$

6. Si f está acotada en D , con $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo $(x, y) \in D$, entonces

$$m \leq A(D) \leq \iint_D f(x, y) dA \leq M A(D)$$

7. a) Si $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in D$, entonces el volumen del sólido que se encuentra arriba de D y debajo de la superficie gráfica de $f(x, y)$ se obtiene como:

$$V = \iint_D f(x, y) dA$$

- b) Si $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo $(x, y) \in D$, entonces el volumen del sólido E por encima de la superficie gráfica de g y por debajo de la superficie gráfica de f , con $(x, y) \in D$, está dado por

$$V(E) = \iint_D [f(x, y) - g(x, y)] dA$$

Veamos algunos ejemplos de resolución de integrales dobles.

- **Ejemplo 5.1.6** Hallar $\iint_D (x^3y + \cos x) dA$, donde D es el triángulo en el plano xy con vértices $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$ y $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Observemos que el triángulo D es una región de tipo I

$$D = D_I = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq x\}$$

y también es una región de tipo II

$$D = D_{II} = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, y \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Entonces, podemos calcular la integral doble integrando primero con respecto a y ($D = D_I$ como región de tipo I) o primero con respecto a x ($D = D_{II}$ como región de tipo II). Para ilustrar el procedimiento, lo haremos de las dos formas.

Consideremos $D = D_I$:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^3y + \cos x) dA &= \int_0^{\pi/2} \int_0^x (x^3y + \cos x) dy dx = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{x^3y^2}{2} + (\cos x)y \right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{x^5}{2} + x \cos x \right) dx = \left[\frac{x^6}{12} \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (x \cos x) dx \\ &= \frac{\pi^6}{(12)(2^6)} + [x \operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

Consideremos $D = D_{II}$:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^3y + \cos x) dA &= \int_0^{\pi/2} \int_y^{\pi/2} (x^3y + \cos x) dx dy = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{x^4y}{4} + \operatorname{sen} x \right]_{x=y}^{x=\pi/2} dy \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi^4y}{2^4} + 1 - \frac{y^5}{4} - \operatorname{sen} y \right) dy = \left[\frac{\pi^4y^2}{62 \cdot 2} + y - \frac{y^6}{46} + \cos y \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi^6}{(128)(2^2)} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^6}{(24)(2^6)} - 1 = \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

Como era de esperar, considerando a D como región de tipo I o de tipo II, llegamos al mismo resultado, como asegura el Teorema de Fubini. En cuanto al grado de dificultad de los cálculos, si bien fue semejante en ambos casos, notamos que cuando consideramos $D = D_I$ fue necesario aplicar la técnica de “integración por partes” para hallar una primitiva de $x \cos x$.

■

Este ejercicio muestra la conveniencia de observar el problema antes de decidir el orden de las integrales iteradas. Esta observación comprende tanto la región a integrar, como el integrando. Por ejemplo, es sencillo ver que el resultado de $\iint_D x \, dA$ sobre un círculo D centrado en el origen, da 0 por consideraciones de simetría. Efectivamente $f(x, y) = x$ es una función impar de x , ya que $f(-x, y) = -f(x, y)$, y la región de integración es la unión de un semicírculo en el semiplano derecho ($x > 0$) y otro en el izquierdo ($x < 0$); así, pensando a la integral en términos de sumas de Riemann, el aporte de un lado se cancela con el aporte del otro. En los siguientes dos ejemplos usaremos una integral doble para calcular el volumen de un sólido.

■ **Ejemplo 5.1.7** Hallar el volumen del tetraedro limitado por los planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ y $z = 0$. Ver Figura 5.1.5.

Comenzamos haciendo una representación gráfica del sólido en \mathbb{R}^3 . La base del tetraedro es un triángulo en el plano xy , ¿cuáles son las rectas que lo limitan? Son las rectas del plano xy determinadas cuando los planos de las “paredes” y el plano del “techo” cortan el plano del “piso”, esto es, i) el plano xz corta al xy en el eje y , o sea en la recta $x = 0$, ii) el plano $x = 2y$ corta al xy en la recta $x = 2y$, iii) el plano $x + 2y + z = 2$ corta al xy en la recta $x + 2y = 2$. O sea que D es el triángulo limitado por las rectas $x = 2y$, $x + 2y = 2$ y $x = 0$.

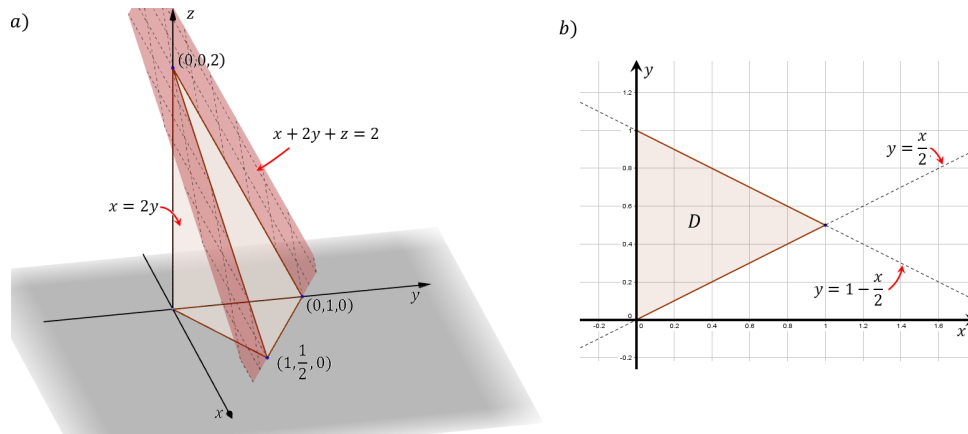


Figura 5.1.5: a) Tetraedro limitado por los planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ y $z = 0$. b) Región de integración D en el plano xy .

Lo escribimos como región de tipo I:

$$D = D_I = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \frac{x}{2} \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}\}.$$

Vemos que el sólido se encuentra por arriba del triángulo D y por debajo del plano $z = 2 - x - 2y$. Luego, usamos la Propiedad 7a), para la función $f(x, y) = 2 - x - 2y$:

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (2 - x - 2y) \, dA = \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{1 - \frac{x}{2}} (2 - x - 2y) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 [2y - xy - y^2]_{y=\frac{x}{2}}^{y=1 - \frac{x}{2}} \, dx \\ &= \int_0^1 \left[2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) - x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} \right] \, dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

■

- **Ejemplo 5.1.8** Determinar el volumen del sólido limitado por los cilindros parabólicos $z = x^2$ y $z = \frac{4}{5}x^2$, por encima de la región D del plano xy encerrada por la parábola $y = 2 - x^2$ y la recta $y = x$.

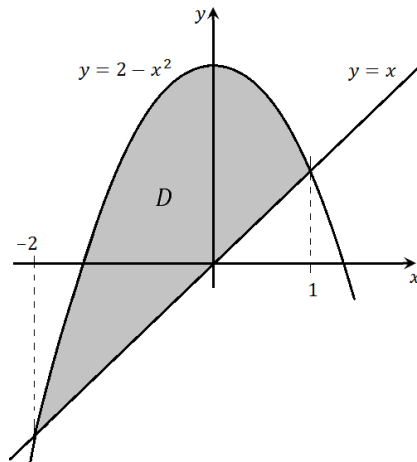


Figura 5.1.6: Región del plano encerrada por la parábola $y = 2 - x^2$ y la recta $y = x$

Usaremos la Propiedad 7b), para las funciones $f(x, y) = x^2 \geq g(x, y) = \frac{4}{5}x^2$. Veamos qué tipo de región es D : si observamos la Figura 5.1.6 notamos que D es una región de tipo I; pero también puede verse como unión de dos regiones de tipo II. En este caso, por ser más simple, consideraremos a D como región de tipo I. Necesitamos ubicar los puntos de intersección entre la recta y la parábola dadas. Buscamos los pares (x, y) que resuelven

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2 - x^2. \end{cases}$$

Reemplazando $y = x$ en la ecuación de la parábola, queda $x = 2 - x^2$ que tiene 2 soluciones: $x = -2$ y $x = 1$. Como $y = x$, los puntos de intersección entre las dos curvas son $(-2, -2)$ y $(1, 1)$. Entonces

$$D = D_I = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2 - x^2\}$$

y evaluamos las integrales iteradas:

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \left[x^2 - \frac{4}{5}x^2 \right] dA = \int_{-2}^1 \left[\int_x^{2-x^2} \frac{1}{5}x^2 dy \right] dx \\ &= \frac{1}{5} \int_{-2}^1 x^2(2 - x^2 - x) dx = \frac{1}{5} \int_{-2}^1 (2x^2 - x^4 - x^3) dx \\ &= \frac{1}{5} \left[2\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} \right]_{-2}^1 = \frac{1}{5} \left(\frac{31}{5} - \frac{17}{4} - 2 \right) = \frac{63}{100} \end{aligned}$$

El volumen del sólido es entonces 0.37 cm^3 , suponiendo que las longitudes se miden en cm. ■

Como ya hemos mencionado, en algunos casos puede ser conveniente invertir el orden de integración; por ejemplo, cuando la integral es muy difícil, intentamos ver si en el orden inverso la dificultad es menor. ¿Cómo invertir el orden de integración? Mostraremos un ejemplo:

■ **Ejemplo 5.1.9** Dada la integral doble $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x + 2) dy dx$,

- Graficar la región de integración para la integral;
- Escribir una integral equivalente con el orden de integración inverso;
- Hallar el valor del área de la región de integración.

a) La región de integración está dada como $D = D_I = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}$. Al dibujar la región D , vemos que está limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = 2x$, entre $x = 0$ y $x = 2$. Grafique.

b) Para encontrar los límites de integración en el orden inverso, es decir para integrar primero respecto de x y luego respecto de y , viendo a la región como $D = D_{II}$, podemos hacer lo siguiente: imaginamos una recta horizontal que “atraviese” la región de izquierda a derecha. Notamos que la recta “entra” en $x = \frac{y}{2}$ y “sale” en $x = \sqrt{y}$. Luego hacemos que y varíe desde $y = 0$ hasta $y = 4$. La integral entonces queda:

$$\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (4x + 2) dx dy,$$

donde $D = D_{II} = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 4, \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{y}\}$.

Muestre que el valor común de las dos integrales es 8.

c) El área de D está dada por

$$A(D) = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} 1 dy dx = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} 1 dx dy = \frac{4}{3}.$$

El área de D es entonces 1.33 cm^2 , suponiendo que las longitudes se miden en cm. ■

En el Ejemplo 5.1.9, la región de integración es de tipo I y también de tipo II, por lo cual resultó relativamente sencillo expresar la región al invertir el orden de integración. Discutan en grupo cómo expresar D en los Ejemplos 5.1.7 y 5.1.8 si se desea cambiar el orden de integración.

5.1.4 Cambio de variables en integrales dobles

Supongamos que se pretende calcular $\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2} dA$, donde D es la porción, en el primer cuadrante, de la corona circular de radio interior 2 y radio exterior 5. Algunas regiones del plano son descritas más fácilmente usando coordenadas polares en lugar de coordenadas cartesianas. Por otro lado, algunas funciones de dos variables pueden también tener una expresión más simple si se escriben x e y en términos de r y θ . En uno y/o en otro caso, conviene operar en otro sistema de coordenadas diferente del sistema cartesiano. Esto sugiere que puede ser más fácil resolver la integral mediante un “cambio de variables”.

Sean D y D^* dos regiones del plano \mathbb{R}^2 , y sea $T : D^* \rightarrow D$ una función tal que $T(u, v) = (x, y)$ siendo $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ para todo $(u, v) \in D^*$. Suponemos que las funciones $x(u, v)$, $y(u, v)$ son diferenciables, y que la función T es biyectiva. La función T es llamada *transformación* en el plano. Un ejemplo conocido de transformación es la función $T(r, \theta) = (x, y)$ donde $x(r, \theta) = r \cos \theta$, $y(r, \theta) = r \sin \theta$, que permite transformar de coordenadas polares a coordenadas cartesianas.

Teorema 5.1.2 – Teorema de cambio de variables para integrales dobles. Sean D y D^* dos regiones de \mathbb{R}^2 y sea $T : D^* \rightarrow D$ una transformación biyectiva dada por $T(u, v) = (x, y)$ siendo $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ para todo $(u, v) \in D^*$, con $x(u, v)$, $y(u, v)$ de clase C^1 . Entonces, para cualquier función continua $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

donde

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = J(u, v)$$

es denominado *Jacobiano* de la transformación T .

El principal propósito de este teorema es proporcionar un método mediante el cual se puedan simplificar algunas integrales dobles. En ciertas ocasiones esta transformación facilita los cálculos, ya sea porque simplifica la función a integrar, o porque resulta más sencilla la región de integración, o por ambos motivos. Busque algún ejemplo en la bibliografía y estúdielo.

- C** Recordemos de Análisis Matemático I que para una función de una variable, la técnica de integración por sustitución dice que $\int_a^b F(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} F(x(u)) x'(u) du$. Esto es, cuando se escribe x en términos de u , aparece un factor $x'(u) = \frac{dx}{du}$. Este factor es análogo a $J(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$ (en valor absoluto). Recordar además que la sustitución (o transformación) implica redefinir el intervalo de integración.

- C** El Jacobiano de la transformación de coordenadas polares (r, θ) en coordenadas cartesianas (x, y) es

$$J(r, \theta) \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

En la integral doble, el factor que aparece al cambiar de variables es el valor absoluto del Jacobiano: $|J(r, \theta)| = r$. No se debe olvidar el valor absoluto.

En coordenadas polares es aplicable la noción de integrales iteradas, y también se puede definir la integral doble para regiones polares generales en el plano. En este caso, hablamos de regiones polares de tipo I o de tipo II, cuando se dan entre valores fijos del radio o del ángulo, respectivamente. ¿Cómo definiría estas regiones? Observe la Figura 5.1.7.

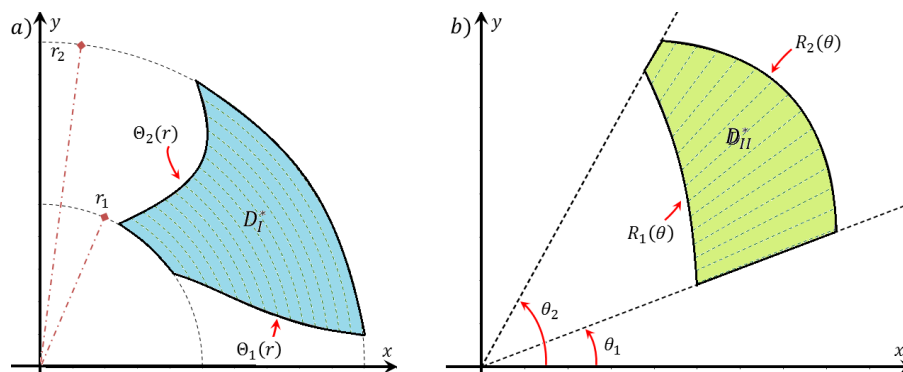


Figura 5.1.7: Regiones planas en coordenadas polares: a) de tipo I; b) de tipo II.

En el siguiente ejemplo resumimos los pasos a seguir para calcular una integral doble usando coordenadas polares.

■ **Ejemplo 5.1.10** Calcular $\iint_D xy \, dA$ donde D es la porción, en el primer cuadrante, de la corona circular de radio interior 2 y radio exterior 5.

El cálculo de la integral doble en coordenadas polares involucra tres pasos:

- i) Expresamos la región de integración en coordenadas polares. Usando que $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, la desigualdad $4 \leq x^2 + y^2 \leq 25$ implica $4 \leq r^2 \leq 25$, luego $r \in [2, 5]$; mientras que $x \geq 0$, $y \geq 0$ implican $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Luego $D^* = \mathcal{R}_{r\theta} = [2, 5] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ que es un “rectángulo polar”.
- ii) Expresamos la función a integrar, en coordenadas polares. La función $f(x, y) = xy$ compuesta con $x(r, \theta) = r \cos \theta$, $y(r, \theta) = r \sin \theta$ resulta $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = r \cos \theta r \sin \theta = r^2 \sin \theta \cos \theta$.
- iii) Calculamos el Jacobiano de la transformación:

$$J(r, \theta) = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial r} = r.$$

Luego $|J| = r$.

Finalmente, armamos la integral doble en términos de las variables transformadas:

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dA &= \int_0^{\pi/2} \int_2^5 (r^2 \sin \theta \cos \theta) (r \, dr \, d\theta) \\ &= \left(\int_2^5 r^3 \, dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \right). \end{aligned}$$

Complete el cálculo y compruebe que el resultado de la integral es $\frac{609}{8}$. ■

- Ⓒ En el último paso del Ejemplo 5.1.10 usamos la *propiedad de factorización*: dado que el integrando es un producto de la forma $g(r)h(\theta)$ y los límites de integración son fijos, se pueden hallar las dos integrales por separado. Esta propiedad NO se puede aplicar si el integrando combina las variables, por ejemplo $\ln(r^3 + r\theta)$, o cuando los límites de integración varían.

■ **Ejemplo 5.1.11** Hallar el volumen del sólido E delimitado por la superficie cónica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la superficie esférica $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

El sólido E tiene la forma de “un cucurucho con una bocha de helado” (grafique). La coordenada z de los puntos del sólido satisface $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, lo que indica que el “techo” de E es una parte de la superficie de la esfera, la cual puede verse como la gráfica de la función de dos variables $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, mientras que el “piso” de E es una parte de la superficie del cono, la cual puede verse como la gráfica de la función de dos variables $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. El volumen de E se expresa, Propiedad 7b), como

$$V = \iint_D \left[\sqrt{1 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right] dA$$

Nos falta determinar la región de integración D . Sospechamos (por el dibujo realizado) que se trata de un círculo. La frontera de la región de integración D es, de hecho, la proyección en el plano xy de la curva intersección C entre las superficies del cono y de la esfera. La curva intersección se expresa como

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}. \end{cases}$$

Iguualamos las expresiones para z : $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, de donde se obtiene $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ con $z = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (esto es, la curva intersección C también se puede ver como la intersección de una superficie cilíndrica con un plano horizontal). Proyectando en el plano xy , deducimos que la ecuación $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ (en $z = 0$) es la frontera de la región de integración, esto es, $D = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$.

Vemos que tanto la función a integrar $f(x, y) - g(x, y)$ como la región de integración D se describen muy fácilmente si trabajamos en coordenadas polares. Efectivamente, se tiene

$$V = \iint_{D^*} [\sqrt{1 - r^2} - r](r \, dr \, d\theta)$$

donde $D^* = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq \sqrt{\frac{1}{2}}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. El resultado es $V = \pi(\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}) \approx 1.97$. ■

En este ejemplo podríamos haber utilizado una *simetría* del problema: el volumen total de E es igual a 4 veces el volumen del sólido contenido en el primer octante. Este cálculo alternativo corresponde a la región de integración dada por un cuarto del círculo D^* , sólo en el primer cuadrante, o sea el mismo intervalo para r pero con $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

5.1.5 Aplicaciones de las integrales dobles

Valor promedio de una función de dos variables en una región plana

Si x_1, x_2, \dots, x_N son números reales, su promedio está definido como

$$[x]_{prom} = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_N)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

donde N es la cantidad de números que consideramos; de esta forma se calcula por ejemplo la altura promedio de los alumnos del curso. Este concepto nos lleva a definir el valor promedio de una función de una variable F en el intervalo $[a, b]$ como

$$F_{prom} = \frac{1}{b - a} \int_a^b F(x) dx,$$

donde $b - a$ es la longitud del intervalo de integración. Se utiliza por ejemplo para calcular la velocidad promedio de un móvil en un dado intervalo de tiempo.

Asimismo para funciones de dos variables, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que el valor promedio de f en D es:

$$f_{prom} = \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x, y) \, dA$$

donde $A(D)$ es el área de D . Teniendo en cuenta que $A(D) = \iint_D dA$, podemos escribir el valor promedio como

$$f_{prom} = \frac{\iint_D f(x, y) \, dA}{\iint_D dA}.$$

Se utiliza por ejemplo para calcular la temperatura promedio en una placa bidimensional.

- Ⓒ A partir de la Propiedad 6, Sección 5.1.3, deduzca que, si $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo $(x, y) \in D$, entonces

$$m \leq f_{prom} \leq M$$

- **Ejemplo 5.1.12** Hallar el valor promedio de $f(x, y) = x \operatorname{sen}^2(xy)$ en $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

Primero calculamos

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dA &= \int_0^\pi \int_0^\pi x \operatorname{sen}^2(xy) dy dx \\ &= \int_0^\pi \left[\int_0^\pi x \frac{1 - \cos(2xy)}{2} dy \right] dx \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{xy}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2xy)}{4} \right]_{y=0}^{y=\pi} dx \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{\pi x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi x)}{4} \right] dx \\ &= \left[\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\cos(2\pi x)}{8\pi} \right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{\pi^3}{4} + \frac{\cos(2\pi^2) - 1}{8\pi}. \end{aligned}$$

También obtenemos

$$\iint_D 1 dA = \int_0^\pi \int_0^\pi 1 dx dy = \int_0^\pi x \Big|_0^\pi dy = y \Big|_0^\pi = \pi^2.$$

El valor promedio de f en D resulta

$$f_{prom} = \frac{\iint_D f(x, y) dA}{\iint_D dA} = \frac{\pi^3/4 + [\cos(2\pi^2) - 1]/8\pi}{\pi^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\cos(2\pi^2) - 1}{8\pi^3} \approx 0.7849.$$

■

Cálculo de la masa total y de las coordenadas del centro de masa de una placa

El cálculo con integrales dobles nos permite considerar una placa con densidad de masa variable. Supongamos que la placa ocupa una región D del plano xy y que su densidad superficial en un punto $(x, y) \in D$ está dada por $\rho(x, y)$, donde $\rho(x, y)$ es una función continua y positiva en D . Se demuestra que la masa total de la placa es:

$$m = \iint_D \rho(x, y) dA$$

en kilogramos, si ρ está dada en kg/m^2 y las longitudes en metros.

Podemos también encontrar el centro de masa de una placa con densidad $\rho(x, y)$ en una región plana D . Las coordenadas (x_{CM}, y_{CM}) del centro de masa son:

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dA \\ y_{CM} &= \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dA \end{aligned}$$

(en metros) donde m es la masa total de la placa.

- **Ejemplo 5.1.13** Hallar el centro de masa de una placa que ocupa el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, si la densidad de masa es $\rho(x, y) = e^{x+y}$ en kg/m^2 .

Calculemos primero la masa total:

$$\begin{aligned} m &= \iint_D e^{x+y} dA = \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y} dx dy = \int_0^1 [e^{x+y}]_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int_0^1 (e^{1+y} - e^y) dy = [e^{1+y} - e^y]_0^1 = e^2 - 2e + 1 = (e - 1)^2, \end{aligned}$$

luego $m \approx 2.95$ kg. Ahora calculamos la integral:

$$\begin{aligned} \iint_D x e^{x+y} dA &= \int_0^1 \int_0^1 x e^{x+y} dx dy = \int_0^1 [x e^{x+y} - e^{x+y}]_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int_0^1 [e^{1+y} - e^{1+y} + e^y] dy = \int_0^1 e^y dy = e - 1 \end{aligned}$$

de modo que:

$$x_{CM} = \frac{e - 1}{(e - 1)^2} = \frac{1}{e - 1} \approx 0.582 \text{ m.}$$

Se pueden intercambiar los papeles de y y x en estos cálculos, por lo que $y_{CM} = \frac{1}{e - 1}$, igual que x_{CM} .

En Física I se estudia que el movimiento de traslación de la placa de $1\text{m} \times 1\text{m}$ con densidad e^{x+y} se puede representar como el de una masa puntual de casi 3 kg concentrada aproximadamente en el punto de coordenadas $(0.6 \text{ m}, 0.6 \text{ m})$. ■

5.1.6 Ejercicios

1. Evalúe las siguientes integrales iteradas:

$$\begin{array}{ll} a) \int_{-1}^1 \int_0^1 (x^4 y + y^2) dy dx & b) \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (y \cos x + 2) dy dx \\ c) \int_0^1 \int_0^1 x y e^{x+y} dy dx & d) \int_{-1}^0 \int_1^2 (-x \ln y) dy dx \end{array}$$

2. Evalúe las integrales del Ejercicio 1 integrando primero respecto x y luego respecto de y .

3. Calcule las siguientes integrales dobles, donde $R = [0, 2] \times [-1, 0]$:

$$a) \iint_R (x^2 y^2 + x) dy dx \quad b) \iint_R |y| \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) dy dx$$

4. Halle el volumen del sólido encerrado por la gráfica de $f(x, y) = 1 + 2x + 3y$, el rectángulo $[1, 2] \times [0, 1]$ en el plano xy y los planos verticales $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$.

5. Halle el volumen del sólido sobre el rectángulo $[-1, 1] \times [-3, -2]$ en el plano xy y debajo de la gráfica de $f(x, y) = x^4 + y^2$.

6. Trace el sólido cuyo volumen está dado por la integral $\int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y) dx dy$

7. Halle el volumen del sólido limitado por el paraboloide elíptico $z = 1 + (x - 1)^2 + 4y^2$, los planos $x = 3$ e $y = 2$, y los planos coordenados.

8. Evalúe las integrales iteradas:

$$a) \int_0^1 \int_0^{x^2} (x + 2y) dy dx \quad b) \int_1^2 \int_v^2 uv du dv \quad c) \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} e^{\sin \theta} dr d\theta$$

9. Evalúe la integral doble:

$$a) \iint_D x^3 y^2 dA, \quad D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq x\}$$

$$b) \iint_D (x + y) dA, \quad D \text{ es la región limitada por las curvas } y = \sqrt{x}, y = x^2$$

- c) $\iint_D y^3 dA$, D es la región triangular con vértices $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(3, 2)$
10. Halle el volumen del sólido dado en los siguientes casos:
- El sólido bajo el paraboloides $z = x^2 + y^2$ y sobre la región del plano xy limitada por $y = x^2$, $x = y^2$.
 - El sólido limitado por el cilindro $y^2 + z^2 = 4$ y los planos $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$, en el primer octante.
 - El tetraedro limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 5$
11. En los siguientes ejercicios, trace la región de integración y escriba una expresión para cada integral cambiando el orden de la integración:
- $\int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx$
 - $\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx$
 - $\int_0^1 \int_{y^2}^{2-y} f(x, y) dx dy$
12. Evalúe la integral $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$ invirtiendo el orden de integración.
13. Calcule el volumen del sólido encerrado entre el paraboloides $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.
14. Determine el área de la región encerrada por la curva $r^2 = 4 \cos(2\theta)$.
15. Calcule el volumen del sólido que está arriba del disco $x^2 + y^2 \leq 4$ del plano xy y debajo del paraboloides $z = 3x^2 + 3y^2$.
16. Para el Ejercicio 9, en cada caso trace la región D . Justifique que se puede interpretar la integral doble como el cálculo de la masa de una placa, y determine la función densidad de masa correspondiente. ¿Cuál de las 3 placas tiene mayor masa?
17. Encuentre la masa y el centro de masa de la placa que ocupa la región $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ y tiene función de densidad $\rho(x, y) = x^2 \text{ g/cm}^2$.
18. Halle el promedio de $f(x, y) = y \sin(xy)$ en $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$.
19. Halle el promedio de $f(x, y) = e^{x+y}$ en el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$.

5.2 Integrales triples

En esta sección vamos a estudiar integrales definidas para funciones de tres variables en regiones sólidas, llamadas integrales triples.

5.2.1 Integral triple en un prisma

Así como comenzamos el estudio de integrales dobles, integrando funciones de dos variables definidas en un rectángulo, para estudiar integrales triples comenzaremos integrando funciones de tres variables con dominio en una caja, prisma rectangular, o paralelepípedo B con caras paralelas a los planos coordenados.

Una caja rectangular B puede describirse en términos de tres intervalos cerrados $[a, b]$, $[c, d]$ y $[s, t]$, que representan a sus aristas a lo largo de los ejes x , y , z , respectivamente. Esto es,

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, s \leq z \leq t\}$$

ó $B = [a, b] \times [c, d] \times [s, t]$. Dibuje la caja B .

Para definir la integral triple usamos la idea de sumas de Riemann. Para ello, el primer paso es dividir B en cajas más pequeñas. De manera semejante a lo que hicimos para integrales dobles, dividimos los intervalos $[a, b]$, $[c, d]$ y $[s, t]$, respectivamente, en n subintervalos de ancho Δx , m subintervalos de ancho Δy , y l subintervalos de ancho Δz . Luego B queda dividido en nml cajas más pequeñas, que denominamos B_{ijk} . ¿Cuál es el volumen ΔV de cada caja pequeña?

Tomamos un punto “de muestra” cualquiera, que llamamos $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$, en cada B_{ijk} , y formamos la suma triple de Riemann:

$$S_{nml} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V.$$

Por analogía con la definición de integral doble, definimos la *integral triple* como el límite de las sumas de Riemann:

Definición La *integral triple* de una función de tres variables f en la caja B es

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{n, m, l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

si el límite existe.

Se puede demostrar que el límite de la definición anterior existe si f es una función continua en B , y el resultado es un número real.

Integrales iteradas

Del mismo modo que para las integrales dobles, las integrales triples pueden expresarse en forma de integrales iteradas, lo que brinda un método práctico para calcularlas:

Teorema 5.2.1 – Teorema de Fubini para integrales triples. Si $f : B \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en la caja $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, s \leq z \leq t\}$, entonces:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_s^t \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz.$$

Las integrales iteradas de este enunciado indican que integramos primero con respecto a la variable x desde a hasta b (manteniendo fijas y y z), luego integramos la expresión que queda, con respecto a y desde c hasta d (manteniendo z fija), y por último integramos con respecto a z desde s hasta t . Hay otros cinco posibles órdenes en los que podemos integrar, y todos dan el mismo valor si f es continua en B . Por ejemplo, si integramos primero con respecto a z desde s hasta t , luego con respecto a x desde a hasta b y finalmente con respecto a y desde c hasta d , escribimos:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_c^d \left[\int_a^b \left(\int_s^t f(x, y, z) dz \right) dx \right] dy.$$

En general el teorema de Fubini se cumple si suponemos que f está acotada en B , es continua excepto quizás en un número finito de superficies suaves, y existen las integrales iteradas.

Así vemos que al igual que la integral doble, la integral triple puede calcularse integrando con respecto a una variable a la vez en cualquier orden de integración, lo que muchas veces es muy conveniente, como veremos en los siguientes ejemplos:

■ **Ejemplo 5.2.1** Evaluar $\iiint_B (2x + 3y + z) dV$, donde $B = [1, 2] \times [-1, 1] \times [0, 1]$.

Comenzamos graficando la región sólida B . Notamos que en este ejemplo cualquier orden en el que realicemos las integrales iteradas demandará, en principio, un trabajo similar. Por lo tanto elegiremos uno cualquiera de los órdenes posibles:

$$\begin{aligned} \iiint_B (2x + 3y + z) dV &= \int_{-1}^1 \left[\int_1^2 \left(\int_0^1 (2x + 3y + z) dz \right) dx \right] dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_1^2 \left[(2x + 3y)z + \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1} dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_1^2 \left(2x + 3y + \frac{1}{2} \right) dx dy = \int_{-1}^1 \left[x^2 + \left(3y + \frac{1}{2} \right) x \right]_{x=1}^{x=2} dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(3y + \frac{7}{2} \right) dy = \left[\frac{3y^2}{2} + \frac{7}{2}y \right]_{y=-1}^{y=1} = \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{2} \right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{2} \right) = 7. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 5.2.2** Integrar $f(x, y, z) = ze^{x+y}$ sobre $B = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Elegimos uno de los seis órdenes de integración para iterar:

$$\begin{aligned} \iiint_B ze^{x+y} dV &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 ze^{x+y} dz dy dx = \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{z^2}{2} e^{x+y} \right]_{z=0}^{z=1} dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{e^{x+y}}{2} dy dx = \int_0^1 \left[\frac{e^{x+y}}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{x+1} - e^x}{2} dx = \left[\frac{e^x(e-1)}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{(e-1)^2}{2}. \end{aligned}$$

Notar que como integramos sobre un rectángulo, los límites de las integrales iteradas son números fijos y además la función f se puede escribir $f(x, y, z) = e^x e^y z$. Por lo tanto, en este ejemplo, la integral triple también se puede calcular de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \iiint_B ze^{x+y} dV &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 ze^x e^y dx dy dz \\ &= \left(\int_0^1 e^x dx \right) \left(\int_0^1 e^y dy \right) \left(\int_0^1 z dz \right) = (e-1)(e-1) \frac{1}{2} = \frac{(e-1)^2}{2}. \end{aligned}$$

■

C Podemos aprovechar la *propiedad de factorización*, como en el Ejemplo 5.2.2, cuando el integrando es un producto de la forma $f_1(x) f_2(y) f_3(z)$ y además la región de integración es una caja $[a, b] \times [c, d] \times [s, t]$.

Notar que esta propiedad NO es aplicable en el caso general; por ejemplo, no es válida si la función es $f(x, y, z) = \cos(ze^{x+y})$ o si los límites de integración varían.

5.2.2 Integral triple en una región sólida general

Definiremos, siguiendo una idea similar a la que empleamos para integrales dobles, la integral triple de una función continua $f : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ en una región sólida acotada E . Consideramos una caja B tal que $E \subset B$. A continuación definimos una función auxiliar $\bar{f} : B \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que coincida con f en E y que sea 0 en los puntos de B que no están en E . Definimos entonces la integral triple de f en E como:

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iiint_B \bar{f}(x, y, z) dV.$$

Esta integral existe si f es una función continua en E y la frontera de E es una superficie “suave”.

C Las Propiedades 1, 2, 3 y 5, de la Sección 5.1.3 que vimos para integrales dobles se extienden fácilmente a integrales triples. Redáctelas.

Además, la integral triple de la función constante $f(x, y, z) = 1$ en un sólido E , da el valor del volumen de la región sólida E : $V(E) = \iiint_E 1 dV$. Piensen en las sumas triples de Riemann: en este caso se está asignando valor 1 a cada caja pequeña de volumen ΔV . Discuta cómo extender la Propiedad 6 de la Sección 5.1.3 a integrales triples.

A continuación, clasificaremos las regiones de integración E en regiones de tipo 1, 2 y 3. Destaquemos que habrá sólidos que son de los tres tipos, de dos o de un tipo, y otros que no son de ninguno de estos tipos. Vemos cómo se procede en cada caso.

Regiones sólidas de tipos 1, 2 y 3

a) Una región sólida es de tipo 1 si se encuentra entre las superficies gráficas de dos funciones continuas de las variables x e y , esto es:

$$E_1 = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_{xy}, Z_1(x, y) \leq z \leq Z_2(x, y)\}$$

donde Z_1 y Z_2 son funciones continuas para todo $(x, y) \in D_{xy}$, siendo D_{xy} la proyección de E_1 en el plano xy , como se muestra en la Figura 5.2.1. Notar que la frontera superior del sólido E es la superficie con ecuación $z = Z_2(x, y)$, mientras que la frontera inferior es la superficie dada por $z = Z_1(x, y)$.

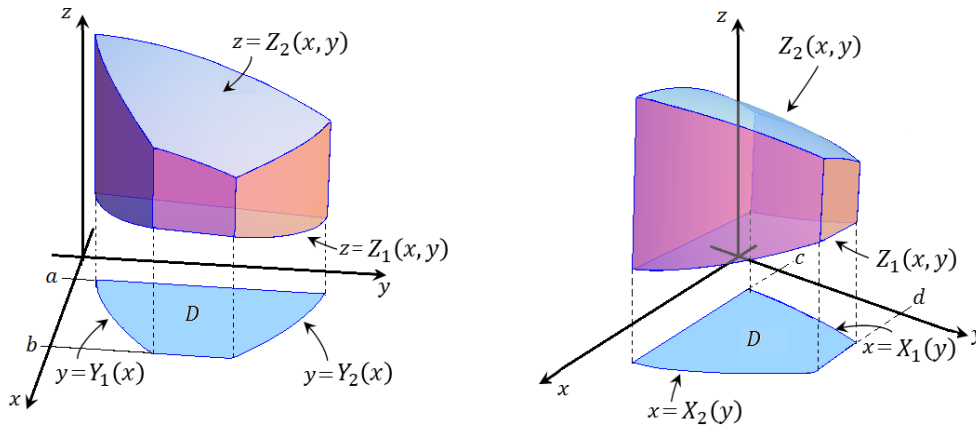


Figura 5.2.1: Algunos ejemplos de regiones sólidas de tipo 1

Por ejemplo:

- La región sólida del primer octante limitada por los planos $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$, es una región de tipo 1. ¿Cuál es su proyección D_{xy} en el plano xy ?
- Una esfera sólida de radio 1 centrada en el origen, es una región de tipo 1 cuya proyección en el plano xy es $x^2 + y^2 \leq 1$, en $z = 0$. ¿Cuáles son las funciones $Z_1(x, y)$ y $Z_2(x, y)$?
- La región sólida encerrada entre dos superficies esféricas concéntricas centradas en el origen con radios 1 y 2, respectivamente, no es una región de tipo 1 (¿por qué?).

La integral triple en una región de tipo 1 se escribe, usando integrales iteradas, así:

$$\iiint_{E_1} f(x, y, z) dV = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{Z_1(x, y)}^{Z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA.$$

Ahora bien, la proyección D_{xy} en el plano xy es una región plana que a su vez puede ser de tipo I ó II. Entonces el sólido E_1 podrá describirse como:

$$E_1^I = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, Y_1(x) \leq y \leq Y_2(x), Z_1(x, y) \leq z \leq Z_2(x, y)\}$$

ó

$$E_1^{II} = \{(x, y, z) : c \leq y \leq d, X_1(y) \leq x \leq X_2(y), Z_1(x, y) \leq z \leq Z_2(x, y)\}$$

según D_{xy} sea una región plana de tipo I o de tipo II, respectivamente. La integral triple podrá escribirse entonces como

$$\iiint_{E_1^I} f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} \int_{Z_1(x, y)}^{Z_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

o

$$\iiint_{E_1^{II}} f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{X_1(y)}^{X_2(y)} \int_{Z_1(x, y)}^{Z_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy.$$

- b) Una región sólida es de tipo 2 si se encuentra entre las superficies gráficas de dos funciones continuas de las variables y y z , esto es:

$$E_2 = \{(x, y, z) : (y, z) \in D_{yz}, X_1(y, z) \leq x \leq X_2(y, z)\}$$

donde X_1 y X_2 son funciones continuas para todo $(y, z) \in D_{yz}$, siendo D_{yz} la proyección de E_2 en el plano yz . Ver Figura 5.2.2. Propongan ejemplos de sólidos de tipo 2.

La integral triple en una región de tipo 2 usando integrales iteradas, de la siguiente forma:

$$\iiint_{E_2} f(x, y, z) dV = \iint_{D_{yz}} \left[\int_{X_1(y, z)}^{X_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dA.$$

La proyección de E_2 en el plano yz puede ser, a su vez, una región plana de tipo I o II, lo que conducirá a una descripción E_2^I ó E_2^{II} , respectivamente.

- c) Una región sólida es de tipo 3 si se encuentra entre las superficies gráficas de dos funciones continuas de las variables x y z , esto es:

$$E_3 = \{(x, y, z) : (x, z) \in D_{xz}, Y_1(x, z) \leq y \leq Y_2(x, z)\}$$

donde Y_1 y Y_2 son funciones continuas para todo $(x, z) \in D_{xz}$, siendo D_{xz} la proyección de E_3 en el plano xz . Ver Figura 5.2.2b. Tomen objetos sólidos que estén a su alrededor y ubíquenlos en un sistema de referencia de tal forma que queden de tipo 3.

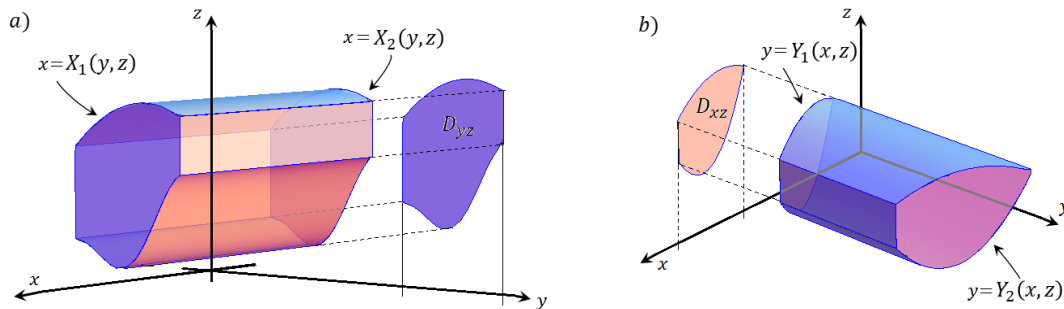


Figura 5.2.2: Regiones sólidas: a) de tipo 2 y b) de tipo 3.

La integral triple en una región de tipo 3 se escribe, usando integrales iteradas, de la siguiente forma:

$$\iiint_{E_3} f(x, y, z) dV = \iint_{D_{xz}} \left[\int_{Y_1(x, z)}^{Y_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dA.$$

La proyección de E_3 en el plano xz puede ser, a su vez, una región plana de tipo I o II, lo que conducirá a una descripción E_3^I ó E_3^{II} , respectivamente.

Veamos ahora algunos ejemplos de evaluación de integrales triples. Cuando planteamos una integral triple es conveniente trazar dos diagramas: i) uno de la región sólida E , que es la región de integración, y ii) otro de la proyección de E sobre alguno de los planos coordenados (el que sea más conveniente). Observando los gráficos, determinamos si E es un sólido de tipo 1, 2 ó 3; y si su proyección sobre el plano coordenado elegido es a su vez una región plana de tipo I ó II. Puede ocurrir, también, que E no sea de ninguno de estos tipos; en ese caso será necesario subdividir el sólido en otros de un tipo dado.

- **Ejemplo 5.2.3** Evaluar $\iiint_E x^2 \cos z dV$, donde E es la región encerrada entre los planos $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $z = 0$, $z = \frac{\pi}{2}$, utilizando dos órdenes de integración diferentes.

Tracemos primero los dos diagramas: i) la región sólida E ; ii) su proyección sobre el

plano coordenado que sea más conveniente para integrar.

- a) Los tres planos verticales ($x = 0$; $y = 0$; $x + y = 1$) y los dos horizontales ($z = 0$; $z = \frac{\pi}{2}$), encierran al cortarse entre sí al sólido E que tiene forma de prisma recto con base triangular, como se ve en la Figura 5.2.3a. Vemos que el “piso” del sólido está en el plano $z = 0$; y el “techo” está en $z = \frac{\pi}{2}$. Esto nos permite pensar a E como un sólido de tipo 1.

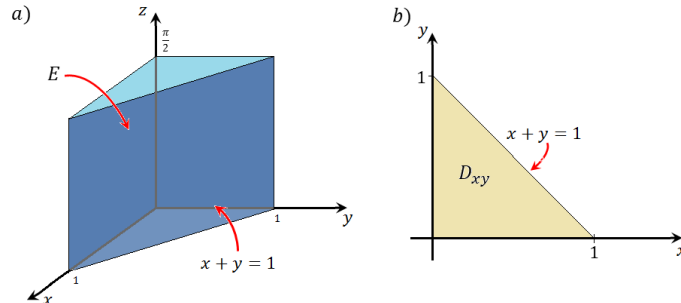


Figura 5.2.3: a) Sólido E limitado por los planos: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $z = 0$, $z = \frac{\pi}{2}$
 b) Proyección de E sobre el plano xy

- b) Proyectamos al plano xy : la “sombra” del sólido en el plano xy determina una región plana triangular delimitada por $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ (en $z = 0$). Ver la Figura 5.2.3b). El sólido E es entonces una región sólida de tipo 1, y su proyección D_{xy} en el plano xy es una región plana triangular de tipos I y II a la vez. Luego:

- i) el triángulo en el plano xy lo describimos como una región plana de tipo I:

$$E_1^I = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}\}; \text{ o}$$

- ii) el triángulo en el plano xy lo describimos como una región plana de tipo II:

$$E_1^{II} = \{(x, y, z) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1 - y, 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Finalmente, calculamos la integral triple de la función continua $f(x, y, z) = x^2 \cos z$, de ambas formas:

- i)

$$\begin{aligned} \iiint_{E_1^I} x^2 \cos z \, dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos z \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} [x^2 \operatorname{sen} z]_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}} \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 \, dy \, dx = \int_0^1 [x^2 y]_{y=0}^{y=1-x} \, dx \\ &= \int_0^1 x^2(1-x) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

- ii)

$$\begin{aligned} \iiint_{E_1^{II}} x^2 \cos z \, dV &= \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos z \, dz \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} x^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1-y} \, dy \\ &= \int_0^1 \frac{(1-y)^3}{3} \, dy = \left[-\frac{(1-y)^4}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

También podríamos haber proyectado el sólido E sobre el plano xz o sobre el plano yz . Calcule nuevamente la integral triple, proyectando ahora sobre yz . ¿Encontró alguna ventaja al realizar los cálculos de esta manera? ■

- **Ejemplo 5.2.4** Calcular el volumen del sólido E encerrado por las superficies S_1 dada por $z = x^2 + 3y^2$ y S_2 dada por $z = 8 - x^2 - y^2$. Graficar.

El volumen del sólido E puede calcularse mediante la integral triple:

$$V(E) = \iiint_E 1 \, dV.$$

Para evaluar esta integral triple, primero hacemos un esbozo de las gráficas de las dos superficies que limitan al sólido E . Luego, observando el gráfico, determinamos sobre qué plano nos conviene proyectar E y hacemos un diagrama de la proyección.

Notemos que ambas superficies corresponden a paraboloides elípticos de eje z : uno de ellos se abre hacia arriba en el semiespacio z positivo, con vértice en el origen, y el otro se abre hacia abajo desarrollándose por debajo del plano horizontal $z = 8$, con vértice en $(0, 0, 8)$ (dibuje ambos paraboloides).

Ambas superficies se cortan en una curva de \mathbb{R}^3 que satisface ambas ecuaciones a la vez:

$$\begin{cases} z = x^2 + 3y^2 \\ z = 8 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

, luego $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2$; o sea que la curva intersección está en el cilindro de ecuación $x^2 + 2y^2 = 4$. Vemos, además que (“dentro” del cilindro) la superficie S_1 está por debajo de la superficie S_2 ; esto implica que los valores de z de los puntos que forman el sólido E van desde $z = 0$, $x^2 + 3y^2$ hasta $z = 0$, $8 - x^2 - y^2$.

Si proyectamos el sólido E en el plano xy (E_1 es un sólido de tipo I), la proyección es la misma que surgiría de proyectar el cilindro: obtenemos la elipse de ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ en el plano xy . La elipse encierra una región plana de tipo I y II; elegimos por ejemplo, considerarla de tipo I, entonces:

$$E_1^I = \{(x, y, z) : -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{2 - \frac{x^2}{2}} \leq y \leq \sqrt{2 - \frac{x^2}{2}}, x^2 + 3y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2\}$$

Ahora ya podemos evaluar la integral triple para obtener el volumen de E :

$$\begin{aligned} V(E) &= \iiint_{E_1^I} 1 \, dV = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{2 - \frac{x^2}{2}}}^{\sqrt{2 - \frac{x^2}{2}}} \int_{x^2 + 3y^2}^{8 - x^2 - y^2} 1 \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{2 - \frac{x^2}{2}}}^{\sqrt{2 - \frac{x^2}{2}}} (8 - 2x^2 - 4y^2) \, dy \, dx \\ &= \int_{-2}^2 \left[(8 - 2x^2)y - 4\frac{y^3}{3} \right]_{y=-\sqrt{2 - \frac{x^2}{2}}}^{y=\sqrt{2 - \frac{x^2}{2}}} \, dx \\ &= \int_{-2}^2 \left[2(8 - 2x^2)\sqrt{2 - \frac{x^2}{2}} - \frac{8}{3}\left(2 - \frac{x^2}{2}\right)^{3/2} \right] \, dx \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_{-2}^2 (4 - x^2)^{3/2} \, dx = 8\pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

donde para hacer la integral de una variable del último paso se utilizó la sustitución $x = 2 \operatorname{sen} u$ (hacer el cálculo completo). Finalmente, el volumen de E vale aproximadamente 35.5 cm^3 (si las longitudes se miden en cm). ■

5.2.3 Cambio de variables en integrales triples

Supongamos que se pretende calcular $\iiint_E xyz \, dV$, donde E es el sólido formado por los puntos del primer octante que distan entre 3 y 5 unidades del eje z , y cuya altura va de 1 a 4. Algunas regiones del espacio son descritas más fácilmente usando coordenadas cilíndricas en lugar de coordenadas cartesianas. Por otro lado, algunas funciones de tres variables pueden también tener una expresión más simple si se escriben x, y, z en términos de r, θ, z . En uno y/o en otro caso, conviene operar en otro sistema de coordenadas diferente del sistema cartesiano. Veamos entonces cómo se calcula una integral triple haciendo un “cambio de variables”.

Sean E y E^* dos regiones sólidas en \mathbb{R}^3 , y sea $T : E^* \rightarrow E$ una función tal que $T(u, v, w) = (x, y, z)$ siendo $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ para todo $(u, v, w) \in E^*$. Suponemos que las funciones $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ son diferenciables y que la función T es biyectiva. La función T es llamada *transformación* en el espacio. Un ejemplo conocido de transformación es la función $T(r, \theta, z) = (x, y, z)$ donde $x(r, \theta, z) = r \cos \theta$, $y(r, \theta, z) = r \operatorname{sen} \theta$, $z(r, \theta, z) = z$, que transforma las coordenadas cilíndricas en cartesianas.

Teorema 5.2.2 – Teorema de cambio de variables para integrales triples. Sean E y E^* dos regiones sólidas en \mathbb{R}^3 y sea $T : E^* \rightarrow E$ una transformación biyectiva dada por $T(u, v, w) = (x, y, z)$ siendo $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ funciones de clase C^1 para todo $(u, v, w) \in E^*$. Entonces, para cualquier función continua $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{E^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \, du \, dv \, dw$$

donde

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = J(u, v, w)$$

es denominado *Jacobiano* de la transformación T .

- Ⓒ El Jacobiano de la transformación de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) en coordenadas cartesianas (x, y, z) está dado por

$$J(r, \theta, z) \equiv \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

En la integral triple, el factor que aparece al cambiar de variables es el valor absoluto del Jacobiano: $|J(r, \theta, z)| = r$.

Ejercicio Demostrar que el Jacobiano de la transformación de coordenadas esféricas a cartesianas está dado, en valor absoluto, por $|J(\rho, \theta, \phi)| = \rho^2 \sin \phi$.

En los siguientes ejemplos resumimos los pasos a seguir para calcular una integral triple usando coordenadas cilíndricas o esféricas.

■ **Ejemplo 5.2.5** Calcular $\iiint_E xyz \, dV$ donde E es la región del primer octante entre las superficies cilíndricas $x^2 + y^2 = 9$ y $x^2 + y^2 = 25$, con altura entre 1 y 4.

- a) Expresamos la región de integración en coordenadas cilíndricas, usando que $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$. La desigualdad $9 \leq x^2 + y^2 \leq 25$ implica $9 \leq r^2 \leq 25$, luego $r \in [3, 5]$; mientras que $x \geq 0$, $y \geq 0$ implican $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$; por último $z \in [1, 4]$. Luego $E^* = \mathcal{B}_{r\theta z} = [3, 5] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [1, 4]$ que es una “caja cilíndrica”. Grafíquela.
- b) Expresamos la función a integrar, en coordenadas cilíndricas. La función $f(x, y, z) = xyz$ resulta $f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) = r \cos \theta r \sin \theta z = r^2 \sin \theta \cos \theta z$.
- c) Calculamos el Jacobiano de la transformación: $J(r, \theta, z) = r$. Luego $|J| = r$. Finalmente, armamos la integral triple en términos de las variables transformadas:

$$\begin{aligned} \iiint_E xyz \, dV &= \int_1^4 \int_0^{\pi/2} \int_3^5 (r^2 \sin \theta \cos \theta z) (r \, dr \, d\theta \, dz) \\ &= \left(\int_3^5 r^3 \, dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \right) \left(\int_1^4 z \, dz \right). \end{aligned}$$

Complete el cálculo y compruebe que el resultado de la integral es 510. ■

Veamos el cálculo de un volumen usando integrales triples en coordenadas cilíndricas.

■ **Ejemplo 5.2.6** Hallar el volumen del sólido E delimitado por la superficie cónica S_1 dada por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la superficie esférica S_2 dada por $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, usando coordenadas cilíndricas.

Sabemos que $V(E) = \iiint_E 1 \, dV$. Los pasos a seguir son:

- a) Escribamos la región de integración en términos de r, θ, z : es el conjunto de puntos por arriba de S_1 dada en coordenadas cilíndricas por $z = r$, y por debajo de S_2 dada por $z = \sqrt{1 - r^2}$. La intersección entre ambas superficies se obtiene de

$$\begin{cases} z = r \\ z = \sqrt{1 - r^2}; \end{cases}$$

luego $r = \sqrt{1 - r^2}$, o sea la curva intersección es la circunferencia de radio $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a la altura $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Entonces

$$E_{r\theta z}^* = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq \sqrt{1 - r^2}\}.$$

- b) La función a integrar es $f(x, y, z) = 1$, que es constante.

c) El Jacobiano, en valor absoluto, es $|J| = r$. Luego tenemos:

$$V(E) = \iiint_E 1 \, dV = \iiint_{E_{r\theta z}^*} 1 (r \, dz \, dr \, d\theta).$$

Realizando la primera integral con respecto a z , queda aún por resolver una integral doble, que es la misma que la dada al final del Ejemplo 5.1.11. Termine el ejercicio. Compare los planteos y procedimientos realizados en ambos ejemplos. ■

■ **Ejemplo 5.2.7** Calcular $\iiint_E e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dV$, donde E es la esfera unitaria dada por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

a) Sabemos que la esfera unitaria en coordenadas esféricas se expresa:

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

b) Por otro lado, la función a integrar es e^{ρ^3} en coordenadas esféricas.

c) El Jacobiano de la transformación entre coordenadas esféricas y cartesianas es, en valor absoluto, $|J| = \rho^2 \sin \phi$. Luego:

$$\iiint_E e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dV = \iiint_{E_{\rho\theta\phi}^*} e^{\rho^3} (\rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi).$$

Complete el cálculo y compruebe que el valor de la integral es: $\frac{4}{3}\pi(e - 1)$. ■

Ejercicio Comprobar que el volumen de una esfera de radio a dado, es $\frac{4}{3}\pi a^3$.

Observamos que el uso de las coordenadas cilíndricas para resolver integrales triples es muy conveniente cuando la región de integración es un sólido del tipo 1 y su proyección en el plano xy es una región plana fácilmente expresable en coordenadas polares. Por otro lado, la transformación a coordenadas esféricas se justifica cuando el sólido tiene la “simetría de la esfera”.

5.2.4 Aplicaciones de las integrales triples

Todas las aplicaciones que vimos para integrales dobles en la sección anterior, se extienden a integrales triples.

Valor promedio de una función de tres variables en una región sólida

Así como para funciones de dos variables vimos que el valor promedio de $F : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en D está dado por: $F_{prom} = \frac{1}{A(D)} \iint_D F(x, y) \, dA$ donde $A(D)$ es el área de D , para una función de tres variables, $f : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, el valor promedio de f en E se define como

$$f_{prom} = \frac{1}{V(E)} \iiint_E f(x, y, z) \, dV$$

donde $V(E)$ es el volumen de E . Teniendo en cuenta que $V(E) = \iiint_E 1 \, dV$, podemos escribir el valor promedio de f en E como

$$f_{prom} = \frac{\iiint_E f(x, y, z) \, dV}{\iiint_E 1 \, dV}.$$

- **Ejemplo 5.2.8** La temperatura (en °C) en cada punto del cubo $E = [-2, 2] \times [-2, 2] \times [-2, 2]$ es proporcional al cuadrado de su distancia al origen. a) ¿Cuál es la temperatura promedio en el cubo E ? b) ¿En qué puntos del cubo E la temperatura es igual a la temperatura promedio?

a) Llamemos c a la constante de proporcionalidad, de modo que

$$T(x, y, z) = c(x^2 + y^2 + z^2).$$

Como $V(E) = 4^3 = 64$, para calcular la temperatura promedio sólo falta evaluar la integral triple:

$$\begin{aligned} \iiint_E c(x^2 + y^2 + z^2) dV &= \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 c(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \\ &= c \left[\int_{-2}^2 \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 x^2 dx dy dz + \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 y^2 dx dy dz \right. \\ &\quad \left. + \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 z^2 dx dy dz. \right] \end{aligned}$$

Por la simetría de las integrales, se tiene que

$$\begin{aligned} \iiint_E c(x^2 + y^2 + z^2) dV &= 3c \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 z^2 dx dy dz \\ &= 3c \int_{-2}^2 z^2 \left(\int_{-2}^2 \int_{-2}^2 dx dy \right) dz = 256c \end{aligned}$$

donde usamos que $\int_{-2}^2 \int_{-2}^2 dx dy = 16$. Finalmente

$$T_{prom} = \frac{\iint \int_E c(x^2 + y^2 + z^2) dV}{V(E)} = \frac{256c}{64} = 4c \text{ °C.}$$

- b) Supongamos que en un punto (x, y, z) la temperatura es igual a la temperatura promedio del cubo, entonces: $c(x^2 + y^2 + z^2) = T_{prom} = 4c$. Esta ecuación es, justamente, la de la superficie de nivel que corresponde al nivel T_{prom} . Luego, la temperatura es igual a la temperatura promedio en todos los puntos de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, que es interior al cubo E (está inscrita en el cubo). ■

Cálculo de la masa total y de las coordenadas del centro de masa de un cuerpo

Sea un cuerpo sólido que ocupa la región $E \subset \mathbb{R}^3$, tal que la densidad volumétrica de masa en un punto $(x, y, z) \in E$ está dada por la función $\rho(x, y, z)$, que es continua y positiva en E . Se demuestra que la masa total del cuerpo es

$$m = \iiint_E \rho(x, y, z) dV$$

en kilogramos, si $\rho(x, y, z)$ está dada en kg/m^3 y las longitudes en metros.

Podemos también encontrar el centro de masa de un cuerpo con densidad $\rho(x, y, z)$ que ocupa una región sólida E . Las coordenadas (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM}) del centro de masa son:

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{1}{m} \iiint_E x \rho(x, y, z) dV \\ y_{CM} &= \frac{1}{m} \iiint_E y \rho(x, y, z) dV \\ z_{CM} &= \frac{1}{m} \iiint_E z \rho(x, y, z) dV \quad (\text{en metros donde } m \text{ es la masa total del cuerpo}). \end{aligned}$$

- **Ejemplo 5.2.9** El cubo $E = [1, 2] \times [1, 2] \times [1, 2]$ está fabricado con un material que tiene densidad de masa $\rho(x, y, z) = (1 + x)ye^z \text{ kg/m}^3$. Hallar la masa total del cubo.

Tenemos que evaluar la integral triple de ρ en E , eligiendo cualquiera de los 6 órdenes de integración posibles:

$$\begin{aligned} m &= \iiint_E (1 + x)ye^z dV = \int_1^2 \int_1^2 \int_1^2 (1 + x)ye^z dx dy dz \\ &= \int_1^2 \int_1^2 \left[\left(x + \frac{x^2}{2} \right) ye^z \right]_{x=1}^{x=2} dy dz \\ &= \int_1^2 \int_1^2 \frac{5}{2} ye^z dy dz = \int_1^2 \left[\frac{5}{4} y^2 e^z \right]_{y=1}^{y=2} dz \\ &= \left[\frac{15}{4} e^z \right]_{z=1}^{z=2} = \frac{15}{4}(e^2 - e) \approx 17.5 \text{ kg}. \end{aligned}$$

■

Pensemos ahora en una región sólida E con densidad de masa constante y que además es simétrica respecto de algún plano. Entonces, el centro de masa está en ese plano. Por ejemplo, supongamos que la región E es simétrica con respecto al plano yz ; si la densidad es constante, el integrando para calcular x_{CM} es impar y como E es simétrica, entonces $x_{CM} = 0$. Por lo tanto el centro de masa está en el plano yz . (Lo mismo ocurrirá si la densidad es una función simétrica o *par* en x , como por ejemplo $\rho(x, y, z) = x^2 g(y, z)$, y si es simétrica la región que ocupa el objeto.) Las simetrías de la región y de la función a integrar son siempre muy útiles para simplificar los cálculos y conviene aprovecharlas. Veamos un ejemplo:

- **Ejemplo 5.2.10** Hallar el centro de masa del cuerpo que ocupa la región semiesférica E definida por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$, suponiendo que el material tiene una densidad $\rho(x, y, z) = 2 \text{ kg/m}^3$.

Por las simetrías de la semiesfera unitaria (con respecto a los planos xz e yz), y por ser la densidad de masa ρ constante, el centro de masa debe estar en el eje z . Efectivamente, $x_{CM} = y_{CM} = 0$ (verifíquelo). Calculemos entonces

$$z_{CM} = \frac{1}{m} \iiint_E z \rho(x, y, z) dV$$

donde m es la masa total de la semiesfera. Consideremos al sólido como una región de tipo 2, esto es proyectemos sobre el plano yz ; luego

$$\begin{aligned} \iiint_E z \rho(x, y, z) dV &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} 2z dx dy dz \\ &= \int_0^1 2z \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} dx dy \right) dz. \end{aligned}$$

Notemos que la expresión entre paréntesis es una integral doble que representa el área del círculo de radio $\sqrt{1 - z^2}$ (donde z está fijo). Por lo que podemos decir (sin hacer el cálculo)

que el valor de dicha integral doble es: $\pi(1 - z^2)$. Usando este resultado queda

$$\begin{aligned} \iiint_E z \rho(x, y, z) dV &= 2 \int_0^1 z \pi(1 - z^2) dz \\ &= 2\pi \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Como la densidad de masa es constante e igual a 2, la masa total es:

$$m = \iiint_E 2 dV = 2V(E) = \frac{4}{3}\pi \text{ kg}$$

donde hemos usado que el volumen de la semiesfera unitaria es $\frac{1}{2} \left(\frac{4}{3}\pi 1^3 \right) = \frac{2}{3}\pi \text{ m}^3$.

Entonces

$$z_{CM} = \frac{\pi/2}{4\pi/3} = \frac{3}{8} \text{ m}.$$

Luego $\vec{r}_{CM} = (0, 0, \frac{3}{8})$ y la masa total es casi 4.2 kg. ■

5.2.5 Ejercicios

1. Evalúe las siguientes integrales iteradas:

$$a) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx \quad b) \int_1^e \int_1^e \int_1^e \frac{1}{xyz} dx dy dz$$

$$c) \int_0^1 \int_0^z \int_0^y ze^{-y^2} dx dy dz$$

2. Evalúe las siguientes integrales triples:

$$a) \iiint_E 2x dV, \text{ donde } E = \{(x, y, z) : 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq z \leq y\}$$

$$b) \iiint_E z dV, \text{ donde } E \text{ es la región en el primer octante limitada por la superficie cilíndrica } y^2 + z^2 = 9 \text{ y los planos } x = 0, y = 3x, z = 0 \text{ en el primer octante.}$$

$$c) \iiint_E xz dV, \text{ donde } E \text{ es el tetraedro con vértices } (0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0) \text{ y } (0, 1, 1).$$

3. Calcule el volumen de la región sólida E , en cada uno de los siguientes casos:

$$a) E \text{ es el tetraedro encerrado por el plano } 6x + 3y + 2z = 6 \text{ y los planos } x = 0, y = 0, z = 0$$

$$b) E \text{ es la región encerrada por la superficie cilíndrica } x^2 + y^2 = 4, \text{ entre el plano } z = 0 \text{ y el plano } x + z = 3$$

$$c) E \text{ es la región sólida que está entre la superficie } z = y^2 \text{ y el plano } xy, \text{ acotada por los planos } x = 0, x = 1, y = -1, y = 1$$

4. Sea E la región limitada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2y$. Escriba integrales iteradas triples en el orden $dz dx dy$ y en el orden $dz dy dx$, que den el volumen del sólido E .

5. Trace el sólido cuyo volumen está dado por la integral iterada que figura en cada uno de los siguientes casos:

$$a) \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} dy dz dx \quad b) \int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dx dz dy$$

6. En cada uno de los siguientes casos, describa y grafique la región sólida cuyo volumen está dado por la integral que se menciona y luego calcule el volumen de la región:

$$a) \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} r dz dr d\theta \quad b) \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

7. Utilice coordenadas cilíndricas para evaluar las siguientes integrales:

$$a) \iiint_E \sqrt{x^2 + y^2} dV, \text{ donde } E \text{ es la región que está "dentro" del cilindro } x^2 + y^2 = 16 \text{ y entre los planos } z = -5 \text{ y } z = 4$$

- b) $\iiint_E x^2 dV$, donde E es el sólido que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, arriba del plano $z = 0$ y abajo del cono $z^2 = 4x^2 + 4y^2$
- c) $\iiint_E (x^3 + xy^2) dV$, donde E es el sólido del primer octante que está debajo del paraboloides $z = 1 - x^2 - y^2$
8. Utilice coordenadas esféricas para evaluar las siguientes integrales:
- a) $\iiint_E (x^2 + y^2 + z^2) dV$, donde E es la esfera unitaria centrada en el origen
- b) $\iiint_E z dV$, donde E es la región que está entre las superficies esféricas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, en el primer octante.
9. Para calcular la integral de $f(x, y, z) = x^3 + (z - 2y)^2$ en $E = \{(x, y, z) : 2 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1, 2y \leq z \leq 2y + 1\}$, se propone transformar a las variables: $u = y, v = z - 2y, w = x^3$. Encuentre el Jacobiano $J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ de la transformación, y la expresión para f y E en términos de (u, v, w) .
10. Halle la masa y las coordenadas del centro de masa del sólido E , con densidad $\rho(x, y, z) = y$ (en g/cm^3), si E es el tetraedro limitado por los planos $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.
11. Calcule la densidad de masa promedio para el sólido E del Ejercicio 10 en g/cm^3 . ¿En qué parte del tetraedro la densidad es mayor que ρ_{prom} ? Relacione con la ubicación del CM .
12. Considere un cono circular de altura $h = 0.3$ m y radio de la base $a = 0.1$ m, hecho en madera de quebracho colorado de densidad constante $\rho = 1200$ kg/m^3 . Halle la masa del cono (en kg).

5.3 Integrales de línea

En la Sección 2.3 del Capítulo 2 vimos cómo calcular la longitud de una curva C en el plano o en el espacio. Si $\vec{r}(t)$ con $t \in [a, b]$, es una parametrización de la curva, su longitud está dada por

$$L_C = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt.$$

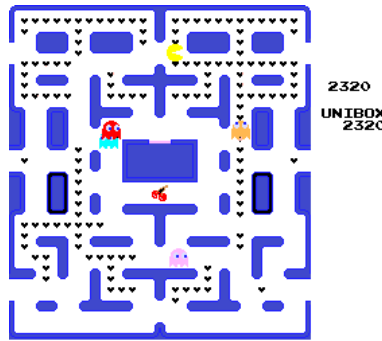
Para ello, aproximamos la curva por una poligonal (ver Figura 2.3.1 del Capítulo 2), esto es, una sucesión de n “pequeños segmentos” de longitud $\Delta s = \frac{L_C}{n} = |\vec{r}'(t)| \Delta t$, construimos la suma de Riemann $\sum_1^n \Delta s$, y tomamos el límite para n muy grande, de modo que los segmentos son infinitesimalmente pequeños, de largo ds . Escribimos simbólicamente

$$L_C = \int_C ds = \int_C 1 ds$$

donde, en la última expresión, indicamos que cada término de la suma de Riemann contribuyen con valor igual a 1 a lo largo de cada tramo de la curva C . Podemos pensar que tenemos definida una función escalar de varias variables, tal que en cada tramo o punto de la curva toma el valor constante 1.

Ahora supongamos que la curva traza un camino en una región del plano o del espacio donde está definida una función f no necesariamente igual a 1, ni siquiera constante. Podemos ir sumando el valor f de la función a medida que se sigue la trayectoria. Para ilustrar esto, pensemos en el clásico juego de pacman en el que se van acumulando, a lo largo del recorrido, los puntajes que se encuentran en distintas ubicaciones (x, y) de la pantalla, por donde va pasando el pacman. ¿Cómo se calcula el puntaje total acumulado en una partida? El resultado del juego clásico es una sumatoria de valores discretos de puntajes: 100, 200, 250, o el que se indique en cada posición. Imaginen un juego de pacman a “valores continuos”.

Esta analogía nos lleva a la noción de integral de una función escalar de varias variables a lo largo de una trayectoria, conocida como integral de línea, de camino, o de curva.



5.3.1 Integral de línea de una función escalar de dos o tres variables

La integral de una función f de dos o de tres variables a lo largo de una curva C del plano o del espacio, respectivamente, se denomina *integral de línea o de camino o de curva, con respecto a la longitud de arco*. Se denota simbólicamente como

$$\int_C f ds$$

y se define formalmente como el límite de las sumas de Riemann de la función f evaluada en puntos de la curva C multiplicada por la longitud Δs del elemento de arco de la curva. Recordemos que Δs puede expresarse como $|\vec{r}'(t)|\Delta t$ siendo $\vec{r}(t)$ una parametrización suave de C .

Definición Sea $f(x, y) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar de dos variables, y sea $C \subset D$ una curva suave en el plano. Sea $\vec{r}(t)$ con $t \in [a, b]$, una parametrización de C . Se define la *integral de línea de f (con respecto a la longitud de arco) en C* como

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Ejercicio Escriba una definición análoga para una función de tres variables y una curva en el espacio.

Se puede probar que si f es continua en C y si la curva C es suave (a trozos), entonces la integral de línea de f a lo largo de C existe.

Observe que en la definición se da una “receta” concreta para hacer la cuenta: la integral de línea se expresa y se calcula como una integral simple en el parámetro t , que es una integral definida entre $t = a$ y $t = b$, y por lo tanto da como resultado un número.

Veamos algunos ejemplos de cálculo de integral de línea de una función escalar. A partir de estos ejemplos, aprovechamos para mencionar algunas propiedades de este tipo de integrales, y daremos una interpretación geométrica.

■ **Ejemplo 5.3.1** Determinar el valor de $\int_C f ds$, donde $f(x, y) = xy^4$ y C es la porción en el semiplano derecho de la circunferencia de radio 4 alrededor del origen, con sentido antihorario.

Una parametrización posible para la curva es $\vec{r}(t) = 4 \cos t \vec{i} + 4 \sin t \vec{j}$, con $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, que le asigna sentido antihorario. Ver Figura 5.3.1. Los dos ingredientes necesarios para el cálculo son: i) la función evaluada en los puntos de la curva, esto es, la cantidad xy^4 cuando $x = x(t) = 4 \cos t$, e $y = y(t) = 4 \sin t$ para $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; ii) el módulo del vector tangente a

la curva, esto es, el módulo de $\vec{r}'(t) = -4 \operatorname{sen} t \vec{i} + 4 \cos t \vec{j}$ en cada punto. Luego

$$\int_C xy^4 ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [4 \cos t (4 \operatorname{sen} t)^4] \sqrt{(-4 \operatorname{sen} t)^2 + (4 \cos t)^2} dt = 4^6 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \operatorname{sen}^4 t dt$$

que se resuelve por el método de sustitución, con $u = \operatorname{sen} t$, y da $\int_C f ds = 4^6 \frac{2}{5} = 1638,4$.

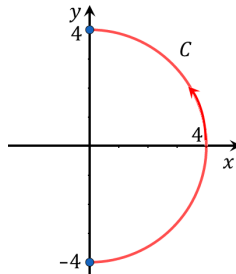


Figura 5.3.1: Curva C correspondiente a la parametrización $\vec{r}(t) = 4 \cos t \vec{i} + 4 \operatorname{sen} t \vec{j}$, con $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

■

Ejercicio Calcule la integral de línea de $f(x, y) = xy^4$:

- i) utilizando otra parametrización para la misma curva C del Ejemplo 5.3.1;
- ii) a lo largo del cuarto de circunferencia en el IV cuadrante y del cuarto de circunferencia en el I cuadrante, y luego sume ambos resultados;
- iii) a lo largo de la curva $\bar{C} = -C$, que corresponde a la misma semicircunferencia pero recorrida en sentido horario.

Verifique que en todos los casos obtiene el mismo resultado.

Teorema 5.3.1 Se pueden demostrar las siguientes propiedades, válidas tanto para funciones de 2 variables y curvas en el plano, como para funciones de 3 variables y curvas en el espacio:

1. El valor de la integral de línea de una función escalar no depende de la parametrización utilizada para la curva, siempre que ésta sea recorrida una sola vez.
2. La integral de línea de una función escalar en una curva formada por dos tramos, es igual a la suma de las integrales de línea de dicha función a lo largo de cada tramo. Simbólicamente,

$$\int_{C_1 \cup C_2} f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds.$$

3. La integral de línea de una función escalar es independiente del sentido de recorrido de la curva. Simbólicamente,

$$\int_{-C} f ds = \int_C f ds$$

donde $-C$ indica la misma curva que C pero en sentido opuesto.

Puede ocurrir que una curva C en el plano sea la frontera de una región plana D ; esto se denota

$$C = \partial D.$$

Entonces C es una curva cerrada (fijando el inicio en algún punto de C , se tiene que el punto inicial y el punto final de la curva coinciden). Es común usar una notación especial para la integral de línea en estos casos:

$$\oint_C f ds$$

para indicar explícitamente que C es cerrada. Si no se especifica el sentido del recorrido, supondremos que es “antihorario” (o sea, dejando a la región D a su izquierda), y anotaremos: $C = \partial D^+$; se dice que dicha curva está “orientada positivamente” en relación a D .

■ **Ejemplo 5.3.2** a) Calcular la integral de línea de la función $f(x, y) = y$ a lo largo de la curva frontera de un círculo D en el plano xy , centrado en el origen. b) Hallar $\oint_C y ds$, donde C está parametrizada por $\vec{r}(t) = 2 \cos t \vec{i} + 2(1 + \sin t) \vec{j}$, con $t \in [0, \pi]$.

a) La frontera de la región D es una curva cerrada. Suponiendo que el radio del círculo es R (fijo), una parametrización de la circunferencia frontera es por ejemplo $\vec{r}(t) = R \cos t \vec{i} + R \sin t \vec{j}$, con $t \in [0, 2\pi]$, que recorre la curva una vez y le asigna sentido antihorario. Luego

$$\oint_{\partial D} y ds = \int_0^{2\pi} (R \sin t) (R dt) = R^2 \int_0^{2\pi} \sin t dt = 0$$

cualquiera sea el radio.

b) En este caso, la curva C es una circunferencia de radio 2 centrada en $(0, 2)$, es cerrada y tiene sentido antihorario. Grafique. La integral de línea de $f(x, y) = y$ a lo largo de C resulta:

$$\oint y ds = \int_0^\pi [2 + (1 + \sin t)] (2 dt) = 4\pi.$$

■

En la Sección 5.1 comentamos que la integral doble $\iint_D x dA$ en un círculo D centrado en el origen, se anula por simetría. Aquí también podemos aplicar propiedades de simetría, que simplifican cálculos. En el Ejemplo 5.3.2a), la integral de línea de una función impar en y e independiente de x , a lo largo de una curva simétrica respecto del eje x , da 0 (pensar en las sumas de Riemann: a cada elemento de arco Δs se lo multiplica por el valor de y , y hay tantos aportes positivos como negativos, que se cancelan). ¿Es aplicable el mismo razonamiento en el Ejemplo 5.3.2b)? ¿Por qué?

■ **Ejemplo 5.3.3** Evaluar la integral de línea de una función positiva $f(x, y)$ a lo largo de la curva L que es el segmento de recta sobre el eje x desde el punto $A(a, 0)$ hasta el punto $B(b, 0)$, con a y b fijos. Interpretar gráficamente el resultado.

Una parametrización (trivial) para la curva dada es $\vec{r}(t) = t \vec{i}$, con $t \in [a, b]$. Luego $\vec{r}'(t) = \vec{i}$, y su módulo es 1. Luego $ds = 1 dt = dx$. Por otro lado debemos evaluar la función en puntos de la curva, para los cuales $x = x(t) = t$ e $y = y(t) = 0$; esto da $f(x(t), y(t)) = f(t, 0)$. Luego podemos definir $F(x) = f(x, 0)$ para $x \in [a, b]$, y tenemos

$$\int_L f ds = \int_a^b f(t, 0) 1 dt = \int_a^b F(x) dx.$$

La última integral, siendo $F(x)$ positiva, sabemos que puede interpretarse gráficamente como el área bajo la gráfica de esta función de una variable. ■

La interpretación dada en el Ejemplo 5.3.3 recuerda algo análogo para integrales dobles: cuando $f(x, y)$ es positiva, la integral doble de f en una región D del plano, da el volumen del sólido encerrado debajo de la superficie gráfica de dicha función de dos variables.

Ahora bien, nos preguntamos: ¿qué interpretación podemos darle a $\int_C f(x, y) ds$ para una $f(x, y)$ positiva y C una curva arbitraria del plano? Volviendo a la noción de sumas de Riemann,

esto es una suma de la longitud de un pequeño tramo Δs secantes a C multiplicados por el valor de la función en algún punto elegido de dicho segmento. Pensemos en la superficie gráfica de la función $f(x, y)$ para (x, y) en C , y como si ésta es positiva, observamos que cada término en la suma de Riemann corresponde al área de un rectángulo ubicado verticalmente, cuya base es el segmento Δs y su altura es el valor de f en el punto elegido del segmento. Luego la integral de línea de $f(x, y)$ a lo largo de una curva C del plano xy , da el valor del área de la “pared sinuosa” que sigue la forma de C en la base y tiene altura dada por el valor de f en los puntos de la curva. Ver Figura 5.3.2.

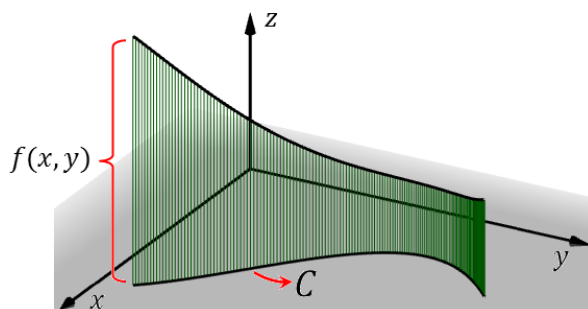


Figura 5.3.2: Integral de línea como área de la pared sinuosa con base C en el plano xy y altura $f(x, y)$.

Imaginen un tinglado cuyo techo tiene forma de cilindro parabólico. Las paredes laterales (los lados hacia donde el techo cae) son rectangulares y su área es fácil de calcular. Pero la pared del frente y del fondo no son rectángulos: realice un dibujo de la situación, luego proponga una función y una curva adecuadas de modo que la integral de línea dé el área de una de estas paredes.

En el caso particular de tomar la función constante 1, dimos otra interpretación para la integral de línea, como la longitud de la curva C . Ambas interpretaciones son válidas: $\int_C 1 ds$ da el valor numérico L_C de la longitud de la curva C , y también da el valor numérico del área de la pared sinuosa con base C y altura 1; sólo cambian las unidades de medida.

Veamos ahora un ejemplo de integral de línea para una curva en el espacio y una función de tres variables.

■ **Ejemplo 5.3.4** Hallar $\int_C x e^{yz} ds$, donde C es el segmento de recta que une el origen con el punto $(1, 2, 3)$.

El segmento C pertenece a la recta L que pasa por el origen y tiene vector director $\vec{v} = (1, 2, 3)$. Luego un conjunto de ecuaciones paramétricas para L es

$$\begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 0 + 2t \\ z = 0 + 3t, \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$. Recordemos que si queremos describir solamente el segmento C , basta con restringir el parámetro: $t \in [0, 1]$. Así, una parametrización para C es $\vec{r}(t) = t\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t\vec{k}$, con $t \in [0, 1]$. El vector $\vec{r}'(t)$ (cuyo módulo necesitamos) no es más que \vec{v} , que tiene norma constante igual a $\sqrt{14}$. Luego

$$\int_C x e^{yz} ds = \int_0^1 (te^{2t \cdot 3t})(\sqrt{14} dt)$$

cuyo valor es $\sqrt{14}(e^6 - 1)/12$ (compruébelo, integrando por sustitución).

■

- Ⓒ Discutan cuánto vale la integral de línea de una función de dos variables a lo largo de una curva de nivel de dicha función; aplíqueno a la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, grafique. ¿Y si se trata de una función de tres variables, y la curva se encuentra sobre una superficie de nivel determinada? Den ejemplos.

Completamos esta sección definiendo otras integrales de línea que utilizaremos más adelante.

Definición Sea $f(x, y) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar de dos variables, y sea $C \subset D$ una curva suave en el plano. Sea $\vec{r}(t)$ con $t \in [a, b]$, una parametrización de C . Se definen la *integral de línea de f con respecto a la variable x a lo largo de C* como

$$\int_C f dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt,$$

y la *integral de línea de f con respecto a la variable y a lo largo de C* como

$$\int_C f dy = \int_a^b f(x(t), y(t)) y'(t) dt.$$

Escriba definiciones análogas para una función de tres variables y una curva en el espacio.

- **Ejemplo 5.3.5** Evaluar $\int_C (xy + \ln y) dy$, donde C es el arco de la parábola $y = x^2$ que va desde $A(1, 1)$ hasta $B(3, 9)$.

En primer lugar, notemos que la función a integrar, $f(x, y) = xy + \ln y$, tiene como dominio de continuidad todo el semiplano superior, sin el eje x ; entonces f es continua a lo largo de la curva C , ya que ésta no contiene ningún punto (x, y) con $y \leq 0$. Luego, podemos asegurar que la integral existe.

Para calcularla, consideremos la parametrización trivial para la curva: $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$, con $t \in [1, 3]$. En este caso, necesitamos solamente la derivada de la segunda componente de la función vectorial, que da $y'(t) = 2t$. Luego

$$\int_C (xy + \ln y) dy = \int_1^3 [tt^2 + \ln(t^2)](2t dt).$$

Completar la cuenta y verificar que $\int_C f dy = \frac{444}{5} - 18 \ln 3$. Repetir el cálculo para la curva $-C$, o sea el arco de parábola que va desde B hasta A . ¿Qué observa?

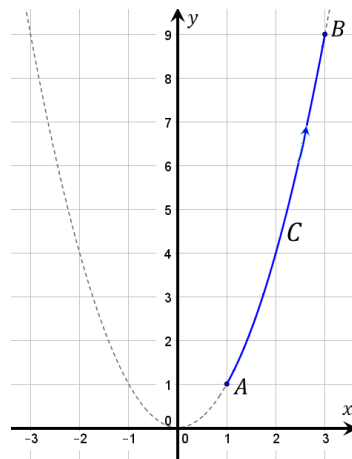


Figura 5.3.3: Arco de parábola $y = x^2$, desde $(1, 1)$ hasta $(3, 9)$.

- C Es importante notar que en el caso de las integrales de línea con respecto a una variable (y no con respecto a la longitud de arco), el sentido de recorrido de la curva sí afecta el resultado.

Proposición 5.3.2 La integral de línea de una función escalar a lo largo de una curva con respecto a una variable, depende del sentido de recorrido de la curva. Simbólicamente,

$$\int_{-C} f dx = - \int_C f dx, \quad \int_{-C} f dy = - \int_C f dy.$$

Esto se desprende de la definición, donde aparecen los factores $x'(t)$ e $y'(t)$, cuyo signo se invierte cuando cambia el sentido de recorrido de la curva.

- Ejemplo 5.3.6** Se desea calcular la diferencia entre las integrales $\oint_C y dx$ y $\oint_C x dy$, donde C es la curva frontera de un rectángulo en el plano con uno de sus vértices en el origen y el vértice opuesto en $(3, 5)$, recorrida en sentido antihorario.

Antes de hacer ningún cálculo, conviene analizar qué tramos de la curva contribuyen a cada una de las integrales. Empezando del origen, llamemos C_1, C_2, C_3 y C_4 respectivamente, a los lados del rectángulo recorrido en sentido antihorario. Ver Figura 5.3.4.

Tomemos C_1 y C_3 que son dos tramos horizontales: se parametrizan por medio de funciones vectoriales con segunda componente constante, luego $y' = 0$ en ambos casos y por lo tanto la integral de línea de la función x respecto de y se anula para los tramos C_1 y C_3 .

Algo similar ocurre con la integral de línea de la función y respecto de x para los tramos C_2 y C_4 .

Tampoco contribuyen $\int_{C_1} y dx$ pues $y = 0$ en C_1 , ni $\int_{C_4} x dy$ pues $x = 0$ en C_4 .

De las 8 integrales de línea que se debían resolver, sólo quedan 2: $\int_{C_3} y dx$ y $\int_{C_2} x dy$, que valen -15 y 15 , respectivamente (muéstrelo sin hacer cálculos de integrales). Finalmente

$$\oint_C y dx - \oint_C x dy = \oint_C (y dx - x dy) = -30.$$

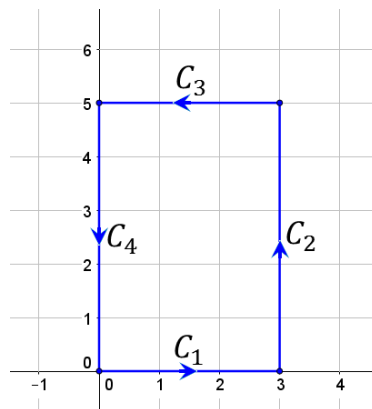


Figura 5.3.4: Curva a trozos, frontera del rectángulo $[0, 3] \times [0, 5]$.

■

5.3.2 Aplicaciones de las integrales de línea

Hemos mencionado que una integral de línea permite obtener la longitud de una curva en el plano o en el espacio, integrando la función constante 1. También discutimos el cálculo del área de una pared sinuosa base es una curva plana y su altura está dada por una función positiva de dos variables.

Masa total y coordenadas del centro de masa de un alambre

Sabemos que teniendo la densidad de masa, podemos calcular la masa total y el centro de masa de una lámina plana delgada mediante integrales dobles, o de un cuerpo sólido usando integrales triples. Análogamente, las integrales de línea permiten calcular la masa total y el centro de masa de un alambre delgado, si se conoce la densidad lineal de masa (masa por unidad de longitud).

Consideremos un alambre que toma la forma de una curva C en el plano y tiene densidad lineal de masa en un punto $(x, y) \in C$ dada por $\rho(x, y)$, donde $\rho(x, y)$ es una función continua (y positiva). La masa total del alambre está dada por

$$m = \int_C \rho(x, y) ds,$$

mientras que las coordenadas del centro de masa del alambre son

$$x_{CM} = \frac{1}{m} \int_C x \rho(x, y) ds,$$

$$y_{CM} = \frac{1}{m} \int_C y \rho(x, y) ds.$$

Si la densidad tiene unidades de kg/m, la masa se da en kilogramos y las coordenadas del CM se dan en metros.

Escriba las ecuaciones que permiten calcular la masa total y las coordenadas del centro de masa para un alambre que toma la forma de una curva C en el espacio y tiene una densidad lineal de masa $\rho(x, y, z)$ en cada punto $(x, y, z) \in C$.

■ **Ejemplo 5.3.7** Un alambre de metal con forma de arco, más denso en sus extremos que en la parte media, se encuentra ubicado a lo largo de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$, en el plano xy . Determinar la masa y el centro de masa del alambre, si la densidad en el punto (x, y) es $\rho(x, y) = (2 - y)$ g/cm.

Utilizamos la parametrización de la semicircunferencia dada por $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$, $t \in [0, \pi]$. Luego $\vec{r}'(t) = -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}$, que tiene módulo 1. La masa total del alambre resulta

$$m = \int_C \rho ds = \int_0^\pi (2 - \sin t) (1 dt) = 2(\pi - 1) \text{ g}.$$

Notamos que $x_{CM} = 0$ cm, ya que la densidad es una función par de x (o sea, $\rho(-x, y) = \rho(x, y)$) y el arco es simétrico con respecto al eje y . Para obtener y_{CM} , calculamos primero

$$\int_C y \rho(x, y) ds = \int_0^\pi (\sin t)(2 - \sin t) (1 dt) = \left[-2 \cos t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^\pi = \frac{8 - \pi}{2},$$

$$\text{luego } y_{CM} = \frac{8 - \pi}{4(\pi - 1)} \approx 0.57 \text{ cm.}$$

■

5.3.3 Ejercicios

1. Evalúe las siguientes integrales de línea donde C es la curva dada:
 - a) $\int_C ye^x ds$, C es el segmento de recta que une $A(1, 2)$ con $B(4, 7)$
 - b) $\int_C x^2z ds$, C es el segmento de recta que va de $(0, 6, -1)$ a $(4, 1, 5)$
 - c) $\int_C xz ds$, C está dada por $x = 6t$, $y = 3\sqrt{2}t^2$, $z = 2t^3$, con $0 \leq t \leq 1$
2. Encuentre la integral de línea de $f(x, y) = 5x^2 + 5y^2$ a lo largo de la circunferencia de radio 3 centrada en el origen (utilice alguna de las propiedades estudiadas).
3. Calcule las siguientes integrales de línea:
 - a) $\int_C \sin x dx$, donde C es el arco de la curva $x = y^4$ que va de $(1, -1)$ a $(1, 1)$
 - b) $\int_C (x\sqrt{y} dx + 2y\sqrt{x} dy)$, donde C está formada por el arco más corto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ de $P_0(1, 0)$ a $P_1(0, 1)$, seguido del segmento de recta de $P_1(0, 1)$ a $P_2(4, 3)$
 - c) $\int_C (yz dy + xy dz)$, donde C está dada por $x = \sqrt{t}$, $y = t$, $z = t^2$, con $0 \leq t \leq 1$
4. Determine $\oint_C [xy dx + x^2 dy]$, siendo C el borde orientado positivamente del triángulo con vértices en $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 2)$.
5. Un alambre se dobla en forma de semicircunferencia $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$. Si la densidad lineal de masa es una constante $\rho(x, y) = k$ g/cm, encuentre la masa y el centro de masa del alambre.
6. Halle la masa y centro de masa de un alambre helicoidal $\vec{r}(t) = 2 \operatorname{sen} t \hat{i} + 2 \cos t \hat{j} + 3t \hat{k}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$, si el material con que está hecho tiene densidad constante.

5.4 Integrales de superficie

Hasta aquí hemos trabajado la integración de funciones escalares de dos y de tres variables, cuando la región de integración es una región del plano [integral doble], una región sólida del espacio [integral triple], o una curva [integral de línea]. En esta sección introducimos la noción de integral de superficie que, pensando en términos de sumas de Riemann, consiste en dividir una porción de superficie en pequeños “parches” y acumular el valor de una función (de tres variables) en cada parche multiplicado por el área de cada elemento de superficie.

Para integrales de línea vimos que, a los fines prácticos, se busca una parametrización para la curva a lo largo de la cual se va a integrar, por medio de una función vectorial $\vec{r}(t)$, con el parámetro t en cierto intervalo; esto permite evaluar la función en puntos de la curva y además calcular la longitud del elemento de arco. Para integrales de superficie se procede de manera análoga. Como primer paso, entonces, buscamos una descripción paramétrica para la superficie sobre la cual se va a integrar. Veremos que esto se logra por medio de una función vectorial de dos parámetros $\vec{r}(u, v)$, con u y v en cierta región. Debemos encontrar también el área de un elemento de superficie.

5.4.1 Superficies paramétricas y funciones vectoriales de dos parámetros

¿Cómo se puede describir una superficie en el espacio? Una opción es usar coordenadas cartesianas y expresar z como una función de x e y (como $z = x^2 + y^2$), o x como una función de y y z , ó y en términos de x y z . O podríamos dar una relación entre las variables x, y, z que defina implícitamente a una de las variables como función de las otras dos (como $x^2y + zy^2 - 3xz^3 = 0$). Algunas superficies se describen mejor cuando las coordenadas x, y, z están dadas en términos de dos parámetros, de manera análoga a las curvas paramétricas que se describen dando x, y y z en función de un parámetro en cierto intervalo paramétrico.

Veamos la forma paramétrica de describir una superficie en el espacio, por medio de una *función vectorial* o *de valores vectoriales*, cuyo rango es un conjunto de vectores en V_3 , y cuyo dominio es un conjunto de pares ordenados en cierta región del plano de paramétrico. Una superficie paramétrica (o parametrizable) S queda dada por una función vectorial de dos parámetros en la forma

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k},$$

con $(u, v) \in D_{uv}$.

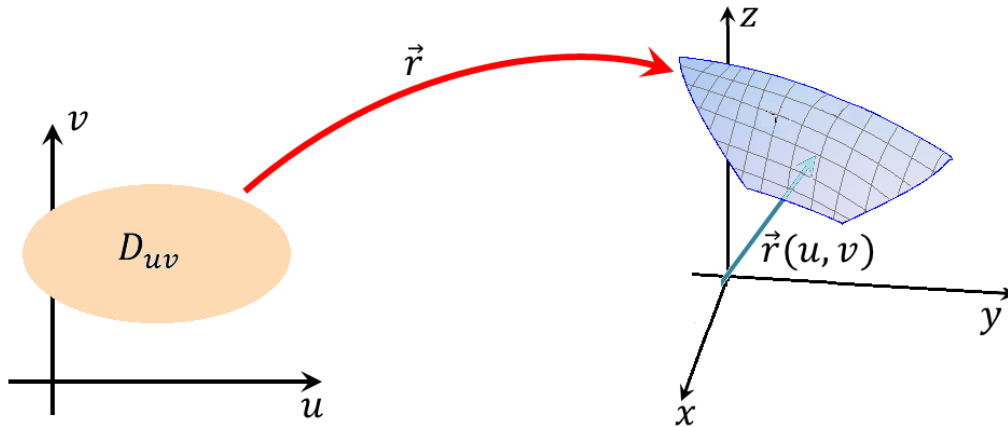


Figura 5.4.1: $\vec{r}(u, v)$ es un vector en V_3 para cada $(u, v) \in D_{uv}$.

Presentamos algunos ejemplos. Primero, dada una función vectorial de dos parámetros, queremos encontrar la forma cartesiana de la superficie que representa. Luego haremos la tarea inversa: dada una superficie encontrar alguna función vectorial que la parametrize.

- **Ejemplo 5.4.1** ¿Qué superficie S en el espacio representa la función vectorial $\vec{r}(u, v) = 2 \operatorname{sen} u \cos v \vec{i} + 3 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \vec{j} + 4 \cos u \vec{k}$, con $(u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$?

Las componentes cartesianas de un punto (x, y, z) de la superficie S están relacionadas entre sí a través de los parámetros u y v , de la siguiente manera

$$x = x(u, v) = 2 \operatorname{sen} u \cos v \quad y = y(u, v) = 3 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \quad z = z(u, v) = 4 \cos u.$$

Para obtener la forma cartesiana de S , que vincula solamente x, y, z , es necesario eliminar los parámetros u, v entre estas tres ecuaciones.

Observamos primero que las componentes de la función vectorial tienen expresiones, en términos de senos y cosenos, similares a la transformación entre coordenadas cartesianas y esféricas asociando los parámetros u y v con ϕ y θ respectivamente. Hacemos el siguiente cálculo:

$$\left(\frac{x(u, v)}{2}\right)^2 + \left(\frac{y(u, v)}{3}\right)^2 + \left(\frac{z(u, v)}{4}\right)^2 = \operatorname{sen}^2 u \cos^2 v + \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 v + \cos^2 u = 1$$

de forma que logramos eliminar los parámetros. Obtenemos entonces la siguiente relación entre x, y, z :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1,$$

de donde deducimos que S es un elipsoide de semiejes 2, 3, 4 centrado en el origen. La función vectorial con $u \in [0, \pi]$ y $v \in [0, 2\pi]$ cubre toda la superficie de este elipsoide, una sola vez.

Veamos qué ocurre si cambiamos el dominio paramétrico para u y v . ¿A qué superficie corresponde la misma función vectorial $\vec{r}(u, v)$, pero con dominio paramétrico $\{(u, v) : 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 4\pi\}$? La forma de la superficie es como la del elipsoide, ya que se llega a la misma ecuación cartesiana, pero no está cubierto por completo todo el elipsoide, y se pasa más de una vez por cada punto cubierto. Efectivamente, por un lado, el parámetro u entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ corresponde a puntos del semiespacio superior (pues $z = 4 \cos u \geq 0$ para esos valores de u); por el otro, dada la periodicidad de las funciones seno y coseno, el parámetro v entre 2π y 4π repite los mismos puntos que entre 0 y 2π . O sea, se trata en este caso de la mitad superior de la superficie del elipsoide de semiejes $2, 3, 4$, centrado en el origen, cubierta dos veces. ■

■ **Ejemplo 5.4.2** Hallar una función vectorial apropiada que parametrize la superficie esférica S de radio 3 centrada en el origen.

Conocemos la ecuación cartesiana de esta superficie cuádrica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

También sabemos que en coordenadas esféricas se escribe simplemente como $\rho = 3$. De la transformación entre coordenadas esféricas y cartesianas, en este caso con ρ fijo, se tiene

$$\begin{cases} x = 3 \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = 3 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = 3 \cos \phi. \end{cases}$$

Vemos que las coordenadas (x, y, z) de un punto P cualquiera de la superficie esférica quedan bien determinadas dando el valor de dos cantidades: ϕ y θ , que toman valores en los intervalos $[0, \pi]$ y $[0, 2\pi]$, respectivamente. Entonces S puede ser descripta mediante una función que a cada par de valores de los parámetros ϕ y θ le asigne el vector $\vec{OP} = 3 \operatorname{sen} \phi \cos \theta \vec{i} + 3 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \vec{j} + 3 \cos \phi \vec{k}$, es decir, mediante la función vectorial.

$$\vec{r}(u, v) = 3 \operatorname{sen} u \cos v \vec{i} + 3 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \vec{j} + 3 \cos u \vec{k}, \text{ con } u \in [0, \pi], v \in [0, 2\pi]$$

Grafique el dominio paramétrico $D_{uv} = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ en un plano cuyos ejes son u y v .

¿Cómo describiría paraméricamente la parte de S con z positivo? ¿Y la porción de S en el primer octante? ¿Qué parte de la superficie esférica está representada por $\vec{r}(u, v)$ con dominio paramétrico $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \times [0, 2\pi]$?

Por último, discutimos otra parametrización para S . Sabiendo que $z = \pm\sqrt{9 - x^2 - y^2}$, podríamos elegir por ejemplo x e y como parámetros, y luego z queda expresado en términos de ellos. Pero debemos dar dos funciones vectoriales:

$$\vec{r}_+(x, y) = x \vec{i} + y \vec{j} + \sqrt{9 - x^2 - y^2} \vec{k}$$

para la semiesfera superior, y

$$\vec{r}_-(x, y) = x \vec{i} + y \vec{j} - \sqrt{9 - x^2 - y^2} \vec{k}$$

para la semiesfera inferior, en ambos casos con dominio paramétrico $D_{xy} = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$. Grafique el dominio paramétrico; observe que para esta elección de parámetros (la “parametrización trivial”), D_{xy} es la proyección de la superficie en el plano xy . Finalmente, $S = S_+ \cup S_-$. ■

■ **Ejemplo 5.4.3** a) Describir mediante una función vectorial el plano que contiene al punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es paralelo a dos vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dados (no paralelos entre sí). b) Resolver para $P_0(1, 2, -3)$, $\vec{a} = (1, 1, -1)$ y $\vec{b} = (1, -1, 1)$.

a) En la Sección 1.5 del Capítulo 1, vimos que la recta que pasa por P_0 y tiene vector director \vec{a} , se puede describir mediante ecuaciones paramétricas considerando que si P es un punto de la recta, entonces el vector $\overrightarrow{P_0P}$ es un múltiplo del vector \vec{a} . Esto es: $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{a}$ para algún $t \in \mathbb{R}$. Análogamente, para el plano que pasa por P_0 y contiene a los vectores \vec{a} y \vec{b} , si P es un punto del plano, entonces el vector $\overrightarrow{P_0P}$ es una combinación lineal de los vectores \vec{a} y \vec{b} : $\overrightarrow{P_0P} = u\vec{a} + v\vec{b}$ para algún $u \in \mathbb{R}$ y algún $v \in \mathbb{R}$.

Escribiendo $\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \vec{r} - \vec{r}_0$, obtenemos finalmente

$$\vec{r}(u, v) = \vec{r}_0 + u\vec{a} + v\vec{b},$$

con u, v reales, de donde el plano queda parametrizado por

$$\vec{r}(u, v) = (x_0 + ua_1 + vb_1)\vec{i} + (y_0 + ua_2 + vb_2)\vec{j} + (z_0 + ua_3 + vb_3)\vec{k} \quad \text{con} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

b) Si $P_0(1, 2, -3)$, $\vec{a} = (1, 1, -1)$ y $\vec{b} = (1, -1, 1)$, una función vectorial que parametriza este plano es

$$\vec{r}(u, v) = (1 + u + v)\vec{i} + (2 + u - v)\vec{j} + (-3 - u + v)\vec{k}, \quad \text{con } D_{uv} = \mathbb{R}^2.$$

Este mismo plano se puede escribir apelando a la “parametrización trivial” del siguiente modo. Sabiendo que $\vec{a} \times \vec{b} = (0, -2, -2)$ es un vector normal al plano, armamos la ecuación lineal

$$0(x - 1) + (-2)(y - 2) + (-2)(z + 3) = 0,$$

o sea, $y + z + 1 = 0$, de donde $z = -y - 1$. Luego una parametrización del plano es:

$$\vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + (-y - 1)\vec{k}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

■

Plano tangente

Dada una superficie S parametrizada por medio de la función $\vec{r}(u, v)$, con $(u, v) \in D_{uv}$, consideremos el conjunto de puntos que se obtiene fijando uno de los parámetros. Al quedar una función vectorial en términos del otro parámetro (el que no se ha fijado), observamos que de esta forma queda descripta una curva en el espacio. Las curvas así obtenidas se denominan *curvas reticulares*. Sus ecuaciones son

$$\vec{r}_1(u) = \vec{r}(u, v_0) \quad \vec{r}_2(v) = \vec{r}(u_0, v)$$

donde se ha fijado $v = v_0$ y $u = u_0$, respectivamente, siendo v_0 y u_0 valores en el dominio paramétrico (de hecho se tiene un conjunto infinito de curvas reticulares).

Para la superficie del Ejemplo 5.4.2, las curvas reticulares determinadas por $\vec{r}(u, v)$ son los paralelos (fijando u , o sea el ángulo ϕ) y los meridianos (fijando v , esto es, θ) de la superficie esférica. En el caso del plano del Ejemplo 5.4.3b), son por un lado rectas paralelas entre sí, unas con vector director \vec{a} , y otras con vector director \vec{b} .

Ejercicio Estudie el las curvas reticulares del paraboloides elíptico parametrizado por $\vec{r}(u, v) = u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + u^2 \vec{k}$, con $u \geq 0$, $v \in [0, 2\pi]$.

Claramente, las curvas reticulares dadas por $\vec{r}_1(u)$ y $\vec{r}_2(v)$ pasan por el punto P_0 de coordenadas $\vec{r}(u_0, v_0)$ (recordemos que identificamos el punto final de este vector ubicado en posición canónica,

con el punto P_0). La derivada de $\vec{r}_1(u)$ respecto de u evaluada en u_0 [que es igual a $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$] es un vector tangente a la curva \vec{r}_1 en P_0 , mientras que la derivada de $\vec{r}_2(v)$ respecto de v evaluada en v_0 [que es igual a $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$] es un vector tangente a la curva \vec{r}_2 en P_0 . Estos dos vectores permiten generar un par de rectas que son tangentes, respectivamente, a las curvas reticulares fijadas. Estas rectas por lo general determinan un plano que, por construcción, resulta ser *tangente* a la superficie S en P_0 , siempre que $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \vec{0}$. El producto vectorial $\vec{n}_0 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$ resulta ser un vector normal a la superficie S y al plano tangente en P_0 .

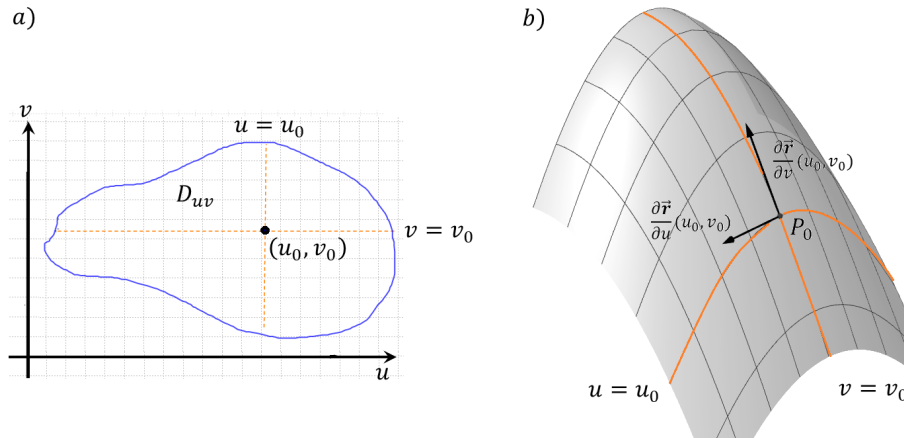


Figura 5.4.2: Vectores tangentes en P_0 . a) Curvas $v = v_0$ y $u = u_0$ en el plano uv ; b) Vectores $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ y $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$.

Definición Sea S una superficie parametrizada por la función vectorial diferenciable $\vec{r}(u, v)$, con $(u, v) \in D_{uv}$, y sea $P_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ un punto en la superficie correspondiente al vector posición $\vec{r}(u_0, v_0)$. Si $\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0) \neq \vec{0}$ entonces los vectores $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ y $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ determinan el *plano tangente* a la superficie S en P_0 , con vector normal dado por

$$\vec{n}_0 = \vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0).$$

Luego, una ecuación para el plano tangente a S en P_0 está dada por

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \vec{n}_0 = 0.$$

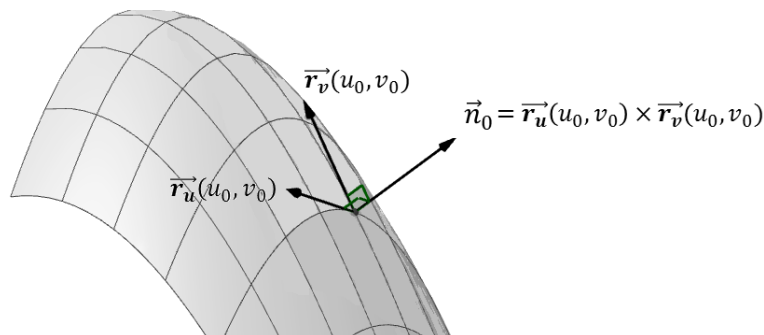


Figura 5.4.3: Vector normal a la superficie en P_0 , calculado como el producto vectorial $\vec{n}_0 = \vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)$.

En el Ejemplo 5.4.3b), tomando $(u_0, v_0) = (0, 0)$ se tiene $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(0, 0) = (1, 1, -1)$ y $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(0, 0) = (1, -1, 1)$; luego $\vec{n}_0 = (0, -2, -2)$ es un vector normal al plano tangente a la superficie paramétrica S dada por $\vec{r}(u, v)$ en el punto $P_0(1, 2, -3)$. En este caso se trata por supuesto del mismo plano S .

¿Cuál es el plano tangente a la superficie esférica del Ejemplo 5.4.2 en el punto $(0, 0, 3)$? Halle el vector \vec{n}_0 y una ecuación del plano tangente, utilizando las dos representaciones vistas en el ejemplo, $\vec{r}(u, v)$ y $\vec{r}(x, y)$.

Definición — Superficie suave. Se dice que S dada por $\vec{r}(u, v)$ con $(u, v) \in D_{uv}$ es una *superficie suave* si $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ para todo $(u, v) \in D_{uv}$.

Una superficie suave admite plano tangente en cada uno sus puntos. No posee esquinas ni saltos.

Orientación de una superficie

Introducimos ahora la noción de “sentido” u *orientación* de una superficie, cuando esto sea posible.

En los Ejemplos 5.4.2 y 5.4.1, las funciones vectoriales dadas $\vec{r}(u, v)$, con dominio paramétrico $(u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, corresponden a sendas superficies que encierran regiones sólidas del espacio. Son por lo tanto *superficies cerradas* y claramente tienen dos caras o lados, una orientada *hacia afuera* del sólido y otra que mira *hacia adentro*. Por convención, la cara de una superficie cerrada cuyos vectores normales apuntan hacia afuera se dice que tiene *orientación positiva*. Podríamos “pintar” una cara de un color y la otra cara de un color diferente, y los colores no se mezclan ni juntan. O podríamos pensar en un objeto moviéndose sobre la superficie: si empieza de un lado, no pasará nunca del otro lado. Ver Figura 5.4.4.

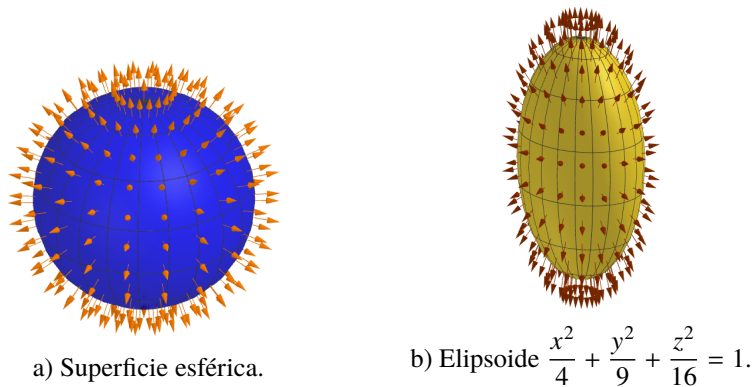


Figura 5.4.4: Dos superficies cerradas orientadas con sus vectores normales hacia afuera

Si consideramos la mitad superior de una superficie esférica, por ejemplo $z = +\sqrt{9 - x^2 - y^2}$, también podemos distinguir dos orientaciones o caras: la que mira *hacia arriba* y la que mira *hacia abajo*; la superficie es entonces orientable. Es abierta y tiene una curva frontera (la circunferencia en el plano xy dada por $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$). En el caso del plano del Ejemplo 5.4.3, también es orientable: una cara da para arriba y la otra para abajo, o *para la derecha* y *para la izquierda* (depende desde dónde se mire); es una superficie abierta, pero si pensamos en todo el plano, no tiene borde o frontera.



a) Plano orientado con vectores hacia arriba.

b) Plano orientado con vectores hacia abajo.

Figura 5.4.5: Un plano con sus dos orientaciones.

Definición Sea S una superficie que admite con plano tangente en todo punto. Para cada $(x, y, z) \in S$, existen dos vectores normales unitarios \vec{n}_I y \vec{n}_{II} siendo $\vec{n}_{II} = -\vec{n}_I$. Si es posible elegir un vector normal unitario de modo que varíe continuamente sobre S , se dice que la superficie es *orientable* o que está orientada. Una orientación está determinada por \vec{n}_I y la otra por \vec{n}_{II} .

Sea S dada por $\vec{r}(u, v)$ una superficie suave y orientable. Entonces la *orientación inducida por la parametrización* está determinada por el *vector normal unitario*

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}.$$

En particular, para una superficie que es gráfica de una función de dos variables, es natural usar la parametrización trivial. Sea $g : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; su gráfica es la superficie S_g dada por $z = g(x, y)$ que, como vimos, se puede parametrizar trivialmente como $\vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + g(x, y)\vec{k}$ con $(x, y) \in D$. Dado que resulta $\vec{n} = \vec{r}_x \times \vec{r}_y = -g_x\vec{i} - g_y\vec{j} + \vec{k}$, con tercera componente positiva, entonces la parametrización trivial induce la *orientación hacia arriba*.

5.4.2 Integral de superficie de una función escalar de tres variables

El objetivo aquí es definir y dar un método práctico para calcular la integral de una función escalar de tres variables en una superficie paramétrica, lo que se conoce como *integral de superficie*. Se denota simbólicamente

$$\iint_S f \, dS$$

(donde dS indica un elemento de superficie) y se define formalmente como el límite de las sumas dobles de Riemann de la función f evaluada en puntos de la superficie S multiplicada por el área ΔS del elemento de superficie.

Sea $\vec{r}(u, v)$ con $(u, v) \in D_{uv}$, una parametrización para la superficie S . Imaginemos que el dominio paramétrico en el plano de parámetros uv , se subdivide en rectángulos de ancho Δu y altura Δv , cuya área es $\Delta A = \Delta u \Delta v$. Barriendo todos los valores de los parámetros dentro de un rectángulo dado en D_{uv} , se genera un “parche” o elemento ΔS en la superficie S . Se puede mostrar que el área de este parche de la superficie S en el espacio está vinculada con el área del rectángulo en la región D_{uv} del plano de parámetros, a través de la siguiente relación:

$$\Delta S = |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| \Delta u \Delta v,$$

esto es, a través de un factor de proporcionalidad dado por el módulo del vector normal a la superficie.

Observar la analogía con la relación hallada en el caso de una curva paramétrica C dada por $\vec{r}(t)$, donde la longitud Δs ¹ de un elemento de arco de la curva C y la longitud del intervalo paramétrico Δt están relacionados por $\Delta s = |\vec{r}'(t)| \Delta t$, esto es, a través del módulo del vector velocidad (que es tangente a la curva).

Definición Sea $f(x, y, z) : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar de tres variables, y sea $S \subset E$ una superficie suave en el espacio. Sea $\vec{r}(u, v)$ con $(u, v) \in D_{uv}$, una parametrización de S . Se define la *integral de superficie* de f en S , como

$$\iint_S f \, dS = \iint_{D_{uv}} f(\vec{r}(u, v)) |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| \, du \, dv.$$

Se puede probar que si f es continua en S y si la superficie S es suave (a trozos), entonces la integral de superficie de f en S existe.

Observe que en la definición se da una “receta” concreta para hacer la cuenta: la integral de superficie se expresa y se calcula como una integral doble en los parámetros u, v , que es una integral definida en el dominio paramétrico D_{uv} , y por lo tanto da como resultado un número.

¹Notar que usamos ds para un elemento de curva, y dS para un elemento de superficie.

Teorema 5.4.1 Se pueden demostrar las siguientes propiedades:

1. El valor de la integral de superficie de una función escalar no depende de la parametrización utilizada para la superficie, siempre que ésta sea cubierta una sola vez.
2. La integral de superficie de una función escalar en una superficie formada por dos trozos, es igual a la suma de las integrales de superficie de dicha función en cada trozo.

Simbólicamente,

$$\iint_{S_1 \cup S_2} f \, dS = \iint_{S_1} f \, dS + \iint_{S_2} f \, dS.$$

3. La integral de superficie de una función escalar es independiente de la orientación de la superficie. Simbólicamente,

$$\iint_{-S} f \, dS = \iint_S f \, dS$$

donde $-S$ indica la misma superficie que S pero con orientación opuesta.

Veamos algunos ejemplos de cálculo de integral de superficie de una función escalar.

- **Ejemplo 5.4.4** Calcule $\iint_S (x+z) \, dS$, siendo S la superficie cilíndrica de eje z y radio 3, entre $z=0$ y $z=5$.

La función a integrar es $f(x, y, z) = x+z$, que es continua en todo \mathbb{R}^3 .

La superficie puede parametrizarse mediante la función vectorial $\vec{r}(\alpha, z) = 3 \cos \alpha \vec{i} + 3 \sin \alpha \vec{j} + z \vec{k}$ con $\alpha \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, 5]$; la superficie es suave, orientable y queda cubierta una sola vez por la parametrización dada. ¿Cuál es la orientación inducida por esta parametrización?

Luego la función evaluada en puntos de la superficie da: $f(x(\alpha, z), y(\alpha, z), z(\alpha, z)) = x(\alpha, z) + z(\alpha, z) = 3 \cos \alpha + z$.

El vector normal a la superficie paramétrica resulta

$$\vec{n} = \vec{r}_\alpha \times \vec{r}_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 \sin \alpha & 3 \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cos \alpha \vec{i} + 3 \sin \alpha \vec{j} + 0 \vec{k}$$

cuyo módulo es $|\vec{r}_\alpha \times \vec{r}_z| = 3$ para todo $(\alpha, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 5]$. Luego la integral de superficie resulta en la siguiente integral doble:

$$\iint_S (x+z) \, dS = \int_0^5 \int_0^{2\pi} (3 \cos \alpha + z) (3 \, d\alpha \, dz) = 0 + 3 [\alpha]_0^{2\pi} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^5 = 75\pi.$$

■

Puede ocurrir que una superficie S sea la frontera de una región sólida E_S . Esto se denota

$$S = \partial E.$$

Entonces S es una superficie cerrada. Es común usar una notación especial para la integral de superficie en estos casos:

$$\oiint_S f \, dS$$

para indicar explícitamente que S es cerrada. Si no se especifica la orientación de la superficie, supondremos que es “hacia afuera” (o sea, dejando al sólido E adentro), y anotaremos:

$$S = \partial E^+;$$

se dice que dicha superficie está “orientada positivamente” en relación a E .

- **Ejemplo 5.4.5** Determine la integral de superficie de la función $x + z$ en la superficie frontera del cilindro de radio 3, eje z y altura 5 apoyado en el plano xy .

Se pide la integral de superficie en una superficie cerrada, que es la unión de tres partes: S , S_1 y S_2 . Ver Figura 5.4.6b). Calculamos entonces las integrales de superficie por tramos: en el Ejemplo 5.4.4 obtuvimos la integral en la superficie cilíndrica lateral S , falta evaluar la integral en las tapas inferior S_1 y superior S_2 . Observamos que para la base, sólo contribuye la integral del primer término de la función, x , ya que en esa tapa se tiene $z = 0$. Por otro lado para la tapa superior contribuyen ambos términos de la función, siendo el segundo constante e igual a 5. Las parametrizaciones triviales para las tapas son: $\vec{r}_1(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ para la tapa inferior, y $\vec{r}_2(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + 5\vec{k}$ para la tapa superior, con $0 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, luego el dominio paramétrico es el círculo de radio 3 centrado en el origen. Sabemos que los vectores normales a S_1 y S_2 deben tener la dirección del eje z (¿por qué?), debemos averiguar el módulo. Dado que en ambos casos $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, su módulo es 1 (es razonable que con esta parametrización, la relación entre el elemento de superficie dS y el elemento de área paramétrica ΔA sea un factor constante e igual a 1).

Entonces para la base se tiene la integral doble

$$\iint_{S_1} f \, dS = \iint_{D_{xy}} (x + 0)(1 \, dx \, dy).$$

La integral doble resultante se puede calcular en coordenadas polares (en el plano paramétrico, que en este caso se llama xy); completar este cálculo. Repetir para la tapa superior (aprovechar el hecho de que contribuye el término $z \, dS$, pero dado que $z = 5$ y el módulo del vector normal es 1, esta parte da 5 veces el área del círculo de radio 3; además el término $x \, dS$ da lo mismo que para la base). Finalmente, sumar las 3 contribuciones para obtener la integral de superficie total, en toda la superficie cerrada que es frontera del cilindro. ■

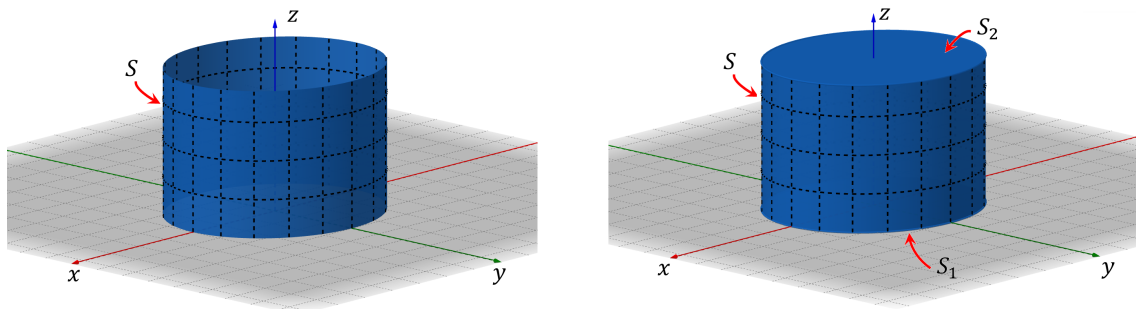


Figura 5.4.6: a) Superficie cilíndrica S con eje z y radio 3, entre $z = 0$ y $z = 5$; b) Superficie cerrada que es la unión de tres partes S , S_1 y S_2 .

5.4.3 Aplicaciones de las integrales de superficie

Área de una superficie paramétrica

Es fácil deducir que la integral de superficie de la función constante $f(x, y, z) = 1$ en una superficie S , da como resultado el valor numérico del área de dicha superficie:

$$A(S) = \iint_S 1 \, dS = \iint_{D_{uv}} 1 |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du \, dv.$$

Observar que, en particular, si la superficie es plana y se encuentra apoyada en el plano xy (o en otro plano horizontal), este cálculo se reduce al área de una región plana, $A(D)$, siendo D el dominio paramétrico.

En el caso de una superficie S_g que es gráfica de una función de dos variables dada por

$$z = g(x, y),$$

usando la parametrización trivial se tiene $\vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + g(x, y)\vec{k}$, con (x, y) en el dominio de la función g . El módulo del vector normal es $|\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = \sqrt{1 + (g_x)^2 + (g_y)^2}$, luego

$$A(S_g) = \iint_{S_g} 1 \, dS = \iint_{D_{xy}} 1 \sqrt{1 + (g_x)^2 + (g_y)^2} \, dx \, dy.$$

■ **Ejemplo 5.4.6** Determine el área de la superficie S parametrizada por $\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (u+5)\vec{k}$, con $u^2 + v^2 \leq 4$.

Puede verse que S es una elipse, apoyada sobre el plano $z = x + 5$, cuya proyección en el plano xy es el círculo de radio 2 alrededor del origen. Para determinar el área de la elipse S , necesitamos calcular el módulo de

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{k},$$

luego $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{2}$. Finalmente

$$A(S) = \iint_S 1 \, dS = \iint_D 1 \cdot (\sqrt{2} \, du \, dv) = \sqrt{2} \iint_D 1 \, du \, dv = \sqrt{2} A(D) = \sqrt{2} \pi 2^2 = 4\sqrt{2}\pi,$$

donde usamos el área del círculo D de radio 2. ■

5.4.4 Ejercicios

1. Considerar los ejercicios de la Sección 1.6.2 del Capítulo 1. Dar funciones vectoriales que parametrizen los planos de los Ejercicios 1, 5 y 6.
2. Considerar las superficies cuádricas vistas en la Sección 1.7.1 del Capítulo 1. Discutir para cuáles se puede utilizar la parametrización trivial. En esos casos, tomar un ejemplo concreto y escribir la función vectorial correspondiente, indicando el dominio paramétrico.
3. Parametrizar las superficies cilíndricas dadas en la Sección 1.7.2 del Capítulo 1.
4. Construir una cinta de Moebius con una tira de papel. ¿Es orientable esta superficie? ¿Por qué?
5. Sea S_1 la parte de la superficie del cono circular $z = r$ (en coordenadas cilíndricas) para z entre 0 y $\sqrt{\frac{1}{2}}$, S_2 una porción de la superficie esférica $\rho = 1$ (en coordenadas esféricas) para $z \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$, y S_3 el disco (plano) $0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}$ a la altura $z = \sqrt{\frac{1}{2}}$.
 - a) Las tres superficies son abiertas. Verificar que tienen como curva frontera a la misma circunferencia, de ecuación $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}, z = \sqrt{\frac{1}{2}}$.
 - b) Hallar funciones vectoriales que parametrizen cada una de las superficies.
 - c) Para cada superficie, si es orientable señalar sus dos caras; y dar las coordenadas de dos puntos próximos a la superficie pero uno de cada lado.
6. Hallar un vector normal unitario en el punto $(1, 0, 1)$ para el paraboloides elíptico parametrizado por $\vec{r}(u, v) = u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + u^2 \vec{k}$. ¿Es orientable la superficie? En caso afirmativo, ¿cuál es la orientación inducida por la parametrización dada?
7. Calcule $\iint_S y \, dS$, donde S es la superficie $z = x + y^2$, con $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.
8. Determine la integral de superficie de la función x^2 a través de la superficie frontera de la esfera unitaria centrada en el origen.
9. Halle el área de la parte de la superficie $z = x^2 + 2y$ que se encuentra arriba de la región triangular T del plano xy con vértices $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$.

5.5 Anexo A. Tabla de primitivas

A continuación presentamos una tabla con las integrales más usuales que pueden ser útiles para todo el capítulo. En todos los casos, debe ser $a > 0$.

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$
- $\int \operatorname{senh} x dx = \operatorname{cosh} x + C$
- $\int \operatorname{cosh} x dx = \operatorname{senh} x + C$
- $\int \operatorname{tgh} x dx = \ln(\operatorname{cosh} x) + C$
- $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C$
- $\int \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{x}{a} \right) + C$
- $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{x}{a} \right) + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + C$
- $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{x+a}{x-a} \right) + C$
- $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + C$
- $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{x}{a} \right) + C$

5.6 Anexo B. Integrales dobles y triples en otros sistemas de coordenadas

Integral doble en coordenadas polares

Aplicaremos la noción de suma de Riemann para obtener la integral definida de una función de 2 variables en una región del plano con forma de “rectángulo polar”. Recordemos que un “rectángulo polar” o sector de corona circular. Ver Sección 1.8.1 del Capítulo 1.

$$\mathcal{R} = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

para $0 \leq a < b$, $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$, cuya área está dada por $A(\mathcal{R}) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)(\beta - \alpha)$.

Como ejemplo, el sector de corona circular entre los radios 2 y 3, y entre los ángulos $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{6}$ es el conjunto $\mathcal{R}_{r,\theta} = \{(r, \theta) : 2 \leq r \leq 3, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\}$; notar que, en coordenadas cartesianas, esta misma región se escribe $\mathcal{R}_{xy} = \{(x, y) : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq \frac{y}{\sqrt{3}} \leq x, x \geq 0\}$. Grafique e indique si se trata de una región en el plano xy de tipo I, o de tipo II, o de tipos I y II a la vez, o ni I ni II.

Una función $f(x, y)$ puede darse en términos de las coordenadas polares, a través de la composición

$$f(x(r, \theta), y(r, \theta)) = f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta).$$

Como ejemplo, la función que indica la distancia de un punto al origen, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, resulta simplemente $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} = r$.

Con estos ingredientes, aplicamos la idea de sumas de Riemann al cálculo de una integral definida de una función $f(x, y)$, en una región \mathcal{R} del plano con forma de “rectángulo polar” $(r, \theta) \in [a, b] \times [\alpha, \beta]$. Para ello, dividimos la región \mathcal{R} en nm “subrectángulos polares” dando una subdivisión del radio en n tramos iguales de largo $\Delta r = \frac{b-a}{n}$, y una subdivisión del ángulo en m subángulos iguales cada uno de los cuales subtiende un arco de $\Delta \theta = \frac{\beta-\alpha}{m}$. Ver Figura 5.6.1.

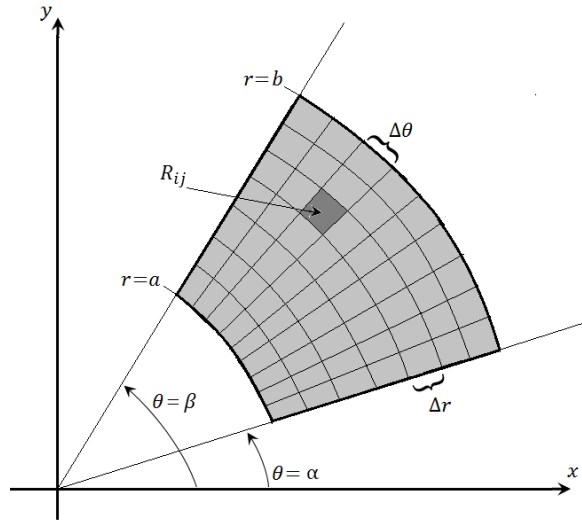


Figura 5.6.1: Subdivisión del sector de corona circular determinado por $r \in [a, b]$, $\theta \in [\alpha, \beta]$.

¿Cuál es el área de cada *subsector de corona circular* \mathcal{R}_{ij} , entre r_i y $r_i + \Delta r$, y entre θ_j y $\theta_j + \Delta \theta$? Aplicando la expresión dada para el área de un sector de corona, tenemos

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2} [(r_i + \Delta r)^2 - r_i^2] [(\theta_j + \Delta \theta) - \theta_j] = \frac{1}{2} [2r_i \Delta r + (\Delta r)^2] \Delta \theta.$$

Dado que Δr es muy pequeño (tomando n suficientemente grande), se puede despreciar el término cuadrático, y resulta $\Delta A_{ij} = r_i \Delta r \Delta \theta$. Observar que es razonable que aparezca el factor r_i , pues para Δr y $\Delta \theta$ fijos los subsectores \mathcal{R}_{ij} más alejados del origen tienen área mayor.

Dentro de cada subsector \mathcal{R}_{ij} , elegimos un punto de muestra, que está caracterizado por un radio r_{ij}^* y un ángulo θ_{ij}^* . Luego, la suma de Riemann doble en coordenadas polares queda

$$S_{nm} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(r_{ij}^* \cos \theta_{ij}^*, r_{ij}^* \sin \theta_{ij}^*) r_{ij}^* \Delta r \Delta \theta$$

que, en el límite para n y m tendiendo a $+\infty$, da la integral buscada.

Definición La integral doble de f en coordenadas polares en el sector de corona circular \mathcal{R} es

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}_{xy}} f(x, y) (dx dy) &= \iint_{\mathcal{R}_{r\theta}} f(x(r, \theta), y(r, \theta)) (r dr d\theta) \\ &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(r_{ij}^* \cos \theta_{ij}^*, r_{ij}^* \sin \theta_{ij}^*) r_{ij}^* \Delta r \Delta \theta \end{aligned}$$

si el límite existe.

La definición se extiende para regiones arbitrarias del plano. Notamos que, al integrar en coordenadas polares, aparece un factor r que multiplica a los diferenciales dr y $d\theta$ para formar el elemento de área: $dA = r dr d\theta$. Ese factor no es otra cosa que el valor absoluto del *Jacobiano* de la transformación de coordenadas polares (r, θ) en coordenadas cartesianas (x, y) .

Anexo: Integral triple en coordenadas cilíndricas

Aplicaremos ahora la noción de sumas de Riemann para obtener la integral definida de una función de 3 variables en una región del espacio con forma de “caja cilíndrica”, que consiste en el sólido entre valores fijos de las coordenadas cilíndricas: $\mathcal{B} = \{(r, \theta, z) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, z_1 \leq z \leq z_2\}$, cuyo volumen está dado por $V(\mathcal{B}) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)(\beta - \alpha)(z_2 - z_1)$.

Como ejemplo tomemos el sólido: $\mathcal{B} = \{(r, \theta, z) : 3 \leq r \leq 5, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq z \leq 4\}$; su volumen es $V(\mathcal{B}) = [\frac{1}{2}(5^2 - 3^2)\frac{\pi}{2}](4 - 1)$, donde el factor entre corchetes es el área de la base, y el otro factor es la altura. Notar que, en coordenadas cartesianas, esta misma región se representa como $\mathcal{B}_{xyz} = \{(x, y, z) : 9 \leq x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq z \leq 4\}$. Grafique e indique si se trata de una región sólida de tipo 1, 2 ó 3, o de varios tipos a la vez, o ninguno.

Un elemento de volumen dV con esta forma tiene la base que es un “rectángulo polar” (o *sector de corona circular*) de área $dA = r dr d\theta$, y tiene altura dz ; entonces $dV = r dr d\theta dz$.

Una función $f(x, y, z)$ de tres variables puede darse en términos de las coordenadas cilíndricas, a través de la composición

$$f(x(r, \theta, z), y(r, \theta, z), z(r, \theta, z)) = f(r \cos \theta, r \sin \theta, z).$$

Como ejemplo, la función que indica la distancia de un punto al origen, $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, resulta $f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) = \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$.

Con estos ingredientes, aplicamos la idea de sumas de Riemann al cálculo de una integral definida de una función $f(x, y, z)$, en una región del espacio con forma de “caja cilíndrica”. Ver Figura 5.6.2. Podemos extender las ideas desarrolladas para integrales dobles en coordenadas polares, agregando aquí la coordenada z apropiadamente.

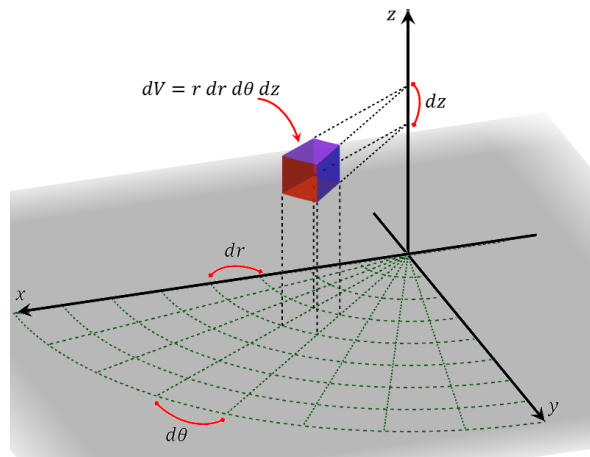


Figura 5.6.2: “Caja cilíndrica” que determina $dV = r dr d\theta dz$.

Definición La integral triple de f en coordenadas cilíndricas en el sólido \mathcal{B} es

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{B}_{xyz}} f(x, y, z) (dx dy dz) &= \iiint_{\mathcal{B}_{r\theta z}} f(x(r, \theta, z), y(r, \theta, z), z(r, \theta, z)) (r dr d\theta dz) \\ &= \lim_{n, m, l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l f(r_{ijk}^* \cos \theta_{ijk}^*, r_{ijk}^* \sin \theta_{ijk}^*, z_{ijk}^*) r_{ijk}^* \Delta r \Delta \theta \Delta z. \end{aligned}$$

si el límite existe.

La definición se extiende para regiones sólidas arbitrarias. Notar que el factor r es el valor absoluto del Jacobiano de la transformación entre coordenadas cilíndricas y cartesianas.

Anexo: Integral triple en coordenadas esféricas

En algunos problemas, será conveniente utilizar las coordenadas esféricas: ρ (distancia de un punto P al origen de coordenadas), θ (el mismo ángulo que en coordenadas cilíndricas), y ϕ (el ángulo entre el semieje z positivo y la dirección del vector \vec{OP}).

Puede probarse que el elemento de volumen se escribe $dV = \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$, donde el factor $\rho^2 \operatorname{sen} \phi$ es el valor absoluto del Jacobiano de la transformación entre coordenadas cartesianas y esféricas.

Una integral triple en coordenadas esféricas, en una región sólida arbitraria E , se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\iiint_{E_{xyz}} f(x, y, z) \, (dx \, dy \, dz) = \iiint_{E_{\rho\theta\phi}} f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi) (\rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi).$$

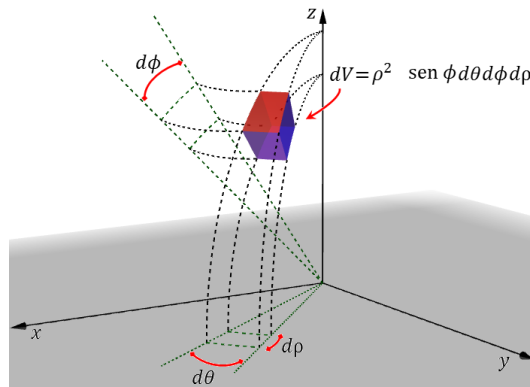


Figura 5.6.3: “Caja esférica” que determina $dV = \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$.

5.7 Actividades integradoras y autoevaluación

5.7.1 Actividades integradoras

- Demuestre que si $R = [a, b] \times [c, d]$ entonces $\iint_R k \, dA = k(b-a)(d-c)$, siendo $k \in \mathbb{R}$.
- Trace el sólido cuyo volumen está representado por la integral $\iint_R \sqrt{9-y^2} \, dA$, donde $R = [0, 4] \times [0, 2]$ en el plano xy .
- Halle el volumen del sólido limitado por el paraboloides elíptico $z = 1 + (x-1)^2 + y^2$, los planos $x = 3$, e $y = 2$, y los planos coordenados.
- Evalúe las siguientes integrales dobles:
 - $\iint_D \frac{2y}{x^2+1} \, dA$, siendo $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$
 - $\iint_D (2x-y) \, dA$, siendo D el círculo de radio 2 centrado en el origen
 - $\iint_D y^3 \, dA$, siendo D la región triangular de vértices $(0, 2)$, $(1, 1)$ y $(3, 2)$
- Halle el volumen de las siguientes regiones sólidas:
 - El sólido se encuentra debajo de la superficie $z = xy$ y arriba del triángulo cuyos vértices son $(1, 1)$, $(4, 1)$ y $(1, 2)$.
 - El sólido está limitado por los cilindros $x^2 + y^2 = R^2$ e $y^2 + z^2 = R^2$, para R fijo.
- Halle el volumen del sólido que se encuentra debajo del paraboloides $z = x^2 + y^2$, arriba del plano xy y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.
- Esboce la región de integración y evalúe las siguientes integrales iteradas:

$$a) \int_0^\pi \int_{\operatorname{sen} x}^{3 \operatorname{sen} x} x(1+y) \, dy \, dx \qquad b) \int_2^4 \int_{y^2-1}^{y^3} 3 \, dx \, dy$$

8. Trace la región de integración y cambie el orden de integración:
- a) $\int_0^1 \int_{\arctg x}^{\pi/4} f(x, y) dy dx$ b) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sen x} f(x, y) dy dx$
9. Evalúe la integral $\int_0^1 \int_{\arc \sen y}^{\pi/2} \cos(x) \sqrt{1 + \cos^2 x} dx dy$ invirtiendo el orden de la integración.
10. Utilice integrales dobles para hallar el área de las siguientes regiones planas:
- a) La región interior al círculo $r = 4 \sen \theta$ y exterior al círculo $r = 2$
- b) La región comprendida entre las curvas $y = 3 - 2|x|$ e $y = |x|$.
11. Una lámina ocupa parte del círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ en el primer cuadrante. Halle el centro de masa, si la densidad de masa en cualquier punto es proporcional a su distancia al eje x .
12. Calcule, mediante integrales triples en el sistema de coordenadas conveniente en cada caso, el volumen de los siguientes sólidos:
- a) $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; z \geq \frac{1}{2}\}$
- b) E es el sólido determinado por $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z \leq 6 - x^2 - y^2$.
- c) E es el sólido comprendido entre dos superficies esféricas concéntricas de radios a y b (con $0 < a < b$).
13. Un tanque de agua tiene forma de semiesfera de radio R , la base es la cara plana y el agua llega hasta una altura H . Calcular el volumen de agua que hay en el tanque.
14. Calcular la masa del sólido ubicado arriba del plano xy , limitado por el plano $y = 9$ y por el cono $y = \sqrt{9x^2 + z^2}$, si la densidad en cualquier punto (x, y, z) del sólido es proporcional a la medida de la distancia de dicho punto al plano xy .
15. Halle el área de la superficie construida del siguiente modo: sobre cada punto de la curva $x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, z = 0$, se coloca un segmento vertical de longitud x (es decir el segmento nace en (x, y, z) y se eleva verticalmente)
16. Evalúe la integral de línea $\int_C 36x^3 ds$, donde C es el arco de cúbica $y = x^3$ que une los puntos $A(0, 0)$ y $B(1, 1)$. ¿Depende el resultado del sentido de la curva? Justificar.
17. Evalúe la integral de superficie $\iint_S yz dS$, donde S es la parte del plano $x + y + z = 1$ que se encuentra en el primer octante.
18. Evalúe $\iint_S (x^2 z + y^2 z) dS$, donde S es la superficie semiesférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$.
19. Proponga una integral adecuada que exprese el área superficial de:
- a) Una parte del paraboloides elíptico $z = 2x^2 + y^2$, con $(x, y) \in [-2, 2] \times [-3, 3]$.
- b) Una parte del paraboloides hiperbólico $z = 2 + x^2 - y^2$, con (x, y) tales que $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

5.7.2 Autoevaluación

1. Evalúe: $\iint_S z dS$ donde S es la superficie cuyos lado S_1 está sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, el fondo S_2 es el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ del plano $z = 0$, y su tapa S_3 es la parte del plano $z = x + 1$ que está arriba de S_2 .
2. Una ciudad está construida a la orilla del mar en forma de región semicircular plana de 3 km de radio. Haga un bosquejo de la situación en un sistema de coordenadas, y encuentre la distancia promedio desde cualquier punto de la ciudad al océano.
3. Se desea construir dos sólidos de igual volumen. El sólido E_1 es una semiesfera de radio 1, y el sólido E_2 es tal que su volumen está dado por la integral doble $\iint_{D_2} [a - \sqrt{x^2 + y^2}] dA$ con $D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$.
- a) Identifique el sólido E_2 y grafique ambos cuerpos, apoyados sobre el plano xy y tomando a z como eje de simetría.
- b) Halle el volumen de E_2 resolviendo la integral doble dada.
- c) Calcule el volumen de E_1 proponiendo una integral triple adecuada.
- d) Determine a de modo que los volúmenes sean iguales.

6

Campos vectoriales

6.1	Campos vectoriales	228
6.1.1	Definición de campo vectorial	228
6.1.2	Aplicaciones	231
6.1.3	Derivadas de un campo vectorial	235
6.1.4	Ejercicios	238
6.2	Integral de línea de un campo vectorial. Teorema Fundamental	239
6.2.1	Ejercicios	242
6.2.2	Teorema fundamental para integrales de línea	242
6.2.3	Independencia de la trayectoria	244
6.2.4	Ejercicios	249
6.3	Integral de superficie de un campo vectorial	250
6.3.1	Ejercicios	254
6.4	Teorema de Green	254
6.4.1	Teorema de Green y campos vectoriales	259
6.4.2	Ejercicios	260
6.5	Teorema de Stokes o Teorema del rotor	260
6.5.1	Ejercicios	264
6.6	Teorema de Gauss o Teorema de la divergencia	264
6.6.1	Ejercicios	267
6.7	Actividades integradoras y autoevaluación	268
6.7.1	Actividades integradoras	268
6.7.2	Autoevaluación	269

6.1 Campos vectoriales

Hasta aquí hemos estudiado distintos tipos de funciones. Trabajamos con funciones vectoriales de una variable $\vec{r}(t) : \mathbb{R} \rightarrow V_n$, asociadas con curvas paramétricas y que permiten por ejemplo describir el movimiento de objetos; también usamos funciones vectoriales de dos variables $\vec{r}(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow V_3$, asociadas con superficies paramétricas. Estas funciones asocian un vector a cada punto en el dominio. Estudiamos funciones escalares de varias variables $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y las utilizamos para describir por ejemplo la temperatura en una placa o en un ambiente, o la densidad de la sustancia con que está hecho algún objeto; estas asocian un escalar a cada punto en el dominio.

Imaginemos ahora que pretendemos estudiar el movimiento de un fluido por una cañería. No es para nada práctico estudiar cómo se mueve cada molécula que constituye el fluido; en cambio la descripción que se adopta consiste en indicar, en cada punto (x, y, z) de la cañería, con qué velocidad $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$ pasa un elemento de fluido. Otra situación de interés es el estudio de la fuerza producida por una carga eléctrica, que sentirá otra carga dependiendo de donde esté situada: $\vec{F}_e(x, y, z)$. Introducimos un tipo de función llamada campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow V_n$, que es una función que a cada punto del espacio de n dimensiones le asigna un vector de n componentes. En este capítulo estudiaremos (para $n = 2$ y $n = 3$) el dominio y rango de un campo vectorial, su representación gráfica, continuidad y límites, así como las derivadas e integrales que involucran campos vectoriales.

6.1.1 Definición de campo vectorial

Nos concentraremos en el estudio de campos vectoriales definidos en regiones sólidas en el espacio que para cada punto asignan un vector de V_3 , y en campos vectoriales definidos en regiones planas que para cada punto del dominio tienen asociado un vector de V_2 . Veamos las correspondientes definiciones, algunos ejemplos y la forma de representarlos gráficamente.

Definición Un *campo vectorial* en $E \subset \mathbb{R}^3$ es una función $\vec{F} : E \rightarrow V_3$ que a cada punto $(x, y, z) \in E$ le asigna un (único) vector de tres componentes $\vec{F}(x, y, z) \in V_3$.

Para cada terna ordenada (x, y, z) del dominio, se tiene asociado un vector tridimensional $\vec{F}(x, y, z)$; luego podemos escribirlo en términos de sus tres componentes, que son funciones escalares de tres variables a las que llamaremos $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ y $R(x, y, z)$. Escribimos en notación vectorial:

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{i}P(x, y, z) + \vec{j}Q(x, y, z) + \vec{k}R(x, y, z)$$

o también como terna ordenada:

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

- **Ejemplo 6.1.1** El campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = \vec{i}z + \vec{j}e^{xyz} + \vec{k}(x^3 + z^2)$ asigna al punto (x_0, y_0, z_0) del espacio, el vector con primera componente z_0 , segunda componente $e^{x_0 y_0 z_0}$, y tercera componente $x_0^3 + z_0^2$. Por ejemplo $\vec{F}(3, 0, 2) = \vec{i}2 + \vec{j}e^{3 \cdot 0 \cdot 2} + \vec{k}(3^3 + 2^2) = \vec{i}2 + \vec{j} + \vec{k}31 = (2, 1, 31)$, mientras que $\vec{F}(-\frac{1}{2}, -1, 2) = \vec{i}2 + \vec{j}e + \vec{k}(-\frac{1}{8} + 4) = (2, e, \frac{31}{8})$. ¿Por qué punto(s) de \mathbb{R}^3 es nula la primer componente de \vec{F} ? ■

Definición Un *campo vectorial* en $D \subset \mathbb{R}^2$ es una función $\vec{F} : D \rightarrow V_2$ que a cada punto $(x, y) \in D$ le asigna un (único) vector de dos componentes $\vec{F}(x, y) \in V_2$.

Para cada par ordenado (x, y) del dominio, se tiene asociado un vector bidimensional $\vec{F}(x, y)$, cuya primera componente llamamos $P(x, y)$ y cuya segunda componente denominamos $Q(x, y)$. P y Q son funciones escalares de dos variables. Escribimos en notación vectorial:

$$\vec{F}(x, y) = \check{i} P(x, y) + \check{j} Q(x, y)$$

o también como par ordenado:

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)).$$

■ **Ejemplo 6.1.2** El campo vectorial $\vec{F}(x, y) = \check{i}\frac{1}{4}(x^2 - y^2 - 1) + \check{j}\frac{xy}{2}$ asigna al punto (x_0, y_0) del plano, el vector con primera componente $\frac{1}{4}(x_0^2 - y_0^2 - 1)$ y segunda componente $\frac{1}{2}x_0y_0$. Por ejemplo $\vec{F}(0, 1) = \check{i}\frac{1}{4}(0^2 - 1^2 - 1) + \check{j}0 = -\frac{1}{2}\check{i} = (-\frac{1}{2}, 0)$, mientras que $\vec{F}(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}) = -\check{i}\frac{111}{400} + \check{j}\frac{3}{20}$. ■

Definición — Dominio e imagen. El dominio de un campo vectorial en el espacio es un subconjunto de \mathbb{R}^3 , y el de un campo vectorial en el plano es un subconjunto de \mathbb{R}^2 . El “dominio natural” del campo está dado por la intersección de los dominios naturales de sus funciones componentes. La imagen de un campo vectorial en el espacio consiste en un conjunto de vectores de 3 componentes, y la de un campo vectorial en el plano son vectores de 2 componentes.

■ **Ejemplo 6.1.3** $\vec{F}(x, y) = \check{i}\ln(xy) + \check{j}\cos(x + y)$ tiene como dominio natural todos los puntos del primer y tercer cuadrante del plano, excepto los ejes coordenados. Justifique. ■

Representación gráfica de un campo vectorial

Una manera de representar gráficamente un campo vectorial en el espacio es mediante un conjunto de flechas donde cada una corresponde al vector $\vec{F}(x, y, z)$, con su origen en el punto (x, y, z) del espacio; análogamente para un campo vectorial en el plano. Otras representaciones gráficas utilizan conjuntos de curvas o de superficies, como las llamadas líneas de flujo, y las denominadas superficies o curvas equipotenciales.

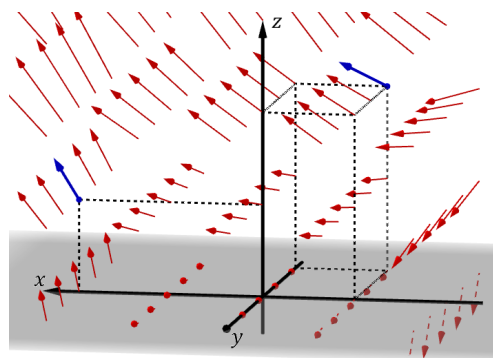


Figura 6.1.1: Representación gráfica del campo del Ejemplo 6.1.1: $\vec{F}(x, y, z) = \check{i}z + \check{j}e^{xyz} + \check{k}(x^3 + z^2)$.



Pueden usar el siguiente recurso para visualizar diferentes campos vectoriales en \mathbb{R}^3 , cambiando las funciones componentes. Explorar las vistas y cambiar la escala de los vectores para una mejor visualización.

<https://ggbm.at/Tn5epr9C>



Pueden usar el siguiente recurso para visualizar distintos campos vectoriales en \mathbb{R}^2 , cambiando las funciones componentes. Explorar, al cambiar la escala de los vectores, la densidad de vectores y el dominio de visualización.

<https://ggbm.at/zDZHqhxv>

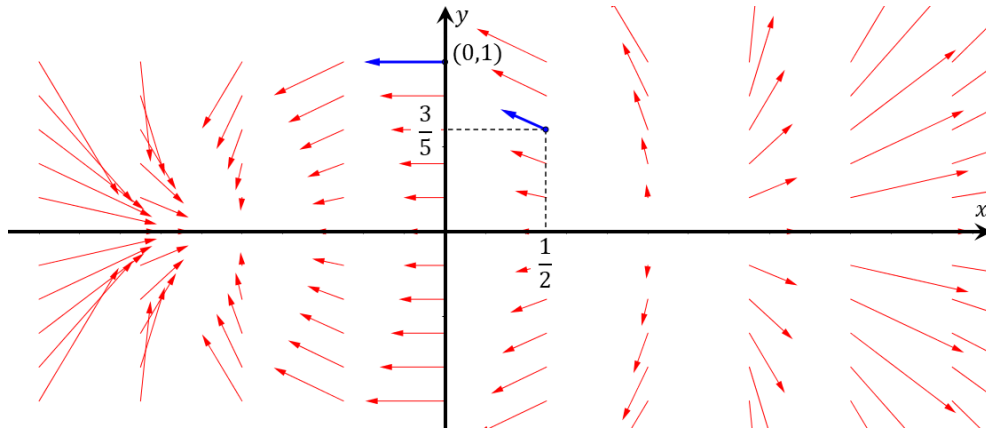


Figura 6.1.2: Representación gráfica del campo vectorial del Ejemplo 6.1.2: $\vec{F}(x, y) = \hat{i}\frac{1}{4}(x^2 - y^2 - 1) + \hat{j}\frac{xy}{2}$.

Continuidad de un campo vectorial

Un campo vectorial es continuo en una región si y sólo si todas sus funciones componentes son continuas en dicha región.

- **Ejemplo 6.1.4** $\vec{F}(x, y, z) = \hat{i}\frac{\ln x + \ln y}{\sqrt{z}} + \hat{j}\cos(x+y) + \hat{k}\frac{1}{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$ es continuo en todos los puntos del primer octante del espacio, excepto en los planos coordenados y en el punto $(1, 1, 1)$. Justifique. ■

Veamos otros ejemplos:

- **Ejemplo 6.1.5** Describa el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x, 0, 0)$, trazando algunos vectores de su imagen.

\vec{F} está definido y es continuo para todo punto de \mathbb{R}^3 . Observamos que el campo es siempre un múltiplo escalar del versor \hat{i} ; efectivamente $\vec{F}(x, y, z) = x(1, 0, 0) = \hat{i}x$. Entonces, se representa mediante flechas paralelas al eje x , con sentido alejándose del plano yz , de módulo creciente a medida que aumenta x en valor absoluto.

¿Cuándo se anula este campo vectorial? Siempre que la coordenada x del punto sea cero, o sea $\vec{F} = \vec{0}$ para todos los puntos de la forma $(0, y, z)$, esto es, para los puntos del plano yz . Esboce una representación gráfica de este campo. Ver Figura 6.1.3 b). ■

■ **Ejemplo 6.1.6** Describa el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = -\dot{y} + \dot{j}x$, trazando algunos vectores de su imagen.

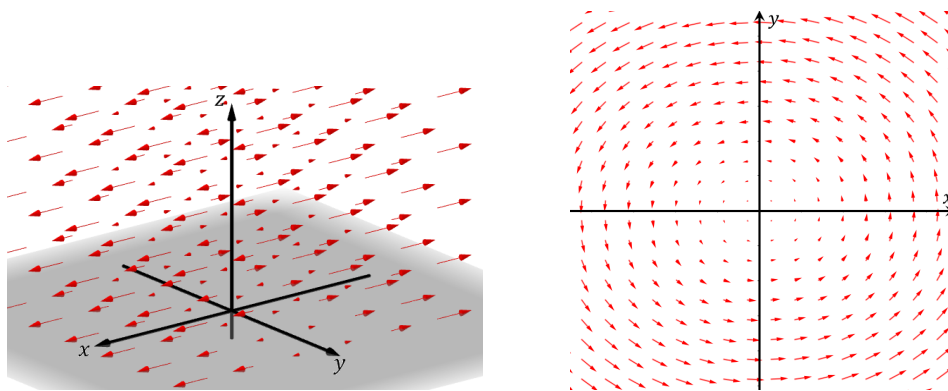
El dominio natural y de continuidad de este campo vectorial es todo \mathbb{R}^2 . Evaluemos el campo en algunos puntos del plano, por ejemplo $\vec{F}(1, 0) = \dot{j}$, $\vec{F}(0, 1) = -\dot{i}$, $\vec{F}(-1, 0) = -\dot{j}$, $\vec{F}(0, -1) = \dot{i}$. Estos vectores tienen módulo 1, y los puntos donde se aplican están a 1 unidad de distancia del origen. Evalúe \vec{F} en $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(-2, 0)$, y $(0, -2)$; ¿qué observa?

El módulo de \vec{F} para un par (x, y) es $|\vec{F}(x, y)| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = |\vec{a}|$, donde \vec{a} denota el vector posición \vec{OA} del punto A de coordenadas (x, y) . Observamos que para todos los puntos en una circunferencia dada centrada en el origen, el campo tiene el mismo módulo; a medida que aumenta el radio de la circunferencia, el módulo del campo es mayor.

Por otro lado, en este ejemplo se tiene $\vec{a} \cdot \vec{F} = (x, y) \cdot (-y, x) = 0$, lo que significa que en cada punto del plano el campo es perpendicular al vector posición.

Podemos analizar también los puntos del plano donde el campo da el vector nulo: esto ocurre si y sólo si $-y = 0$ y $x = 0$, o sea solamente para el origen: $\vec{F}(0, 0) = \vec{0}$.

Se muestra una representación gráfica de este campo en la Figura 6.1.3 a).



a) Campo vectorial en el espacio. Ejemplo 6.1.5. b) Campo vectorial en el plano. Ejemplo 6.1.6.

Figura 6.1.3: Representación gráfica de campos vectoriales.

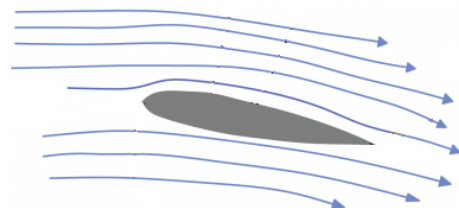
Ⓒ En algunos cálculos o aplicaciones puede resultar útil considerar un campo vectorial en el plano como caso particular de campo vectorial en el espacio para el cual la primera y segunda funciones componentes no dependen de la variable z , la tercera componente es la función nula, y el dominio es un conjunto de puntos en el plano xy . Esto es, identificaremos a $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ en $D \subset \mathbb{R}^2$, con $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$ en $E = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z = 0\}$.

6.1.2 Aplicaciones

Campo de velocidades

Cuando se pretende describir un fluido es conveniente indicar la velocidad con que pasa un elemento de fluido por un dado punto del espacio. En el caso de flujo estacionario (no depende del tiempo), se usa un *campo vectorial de velocidades* $\vec{v}(x, y, z)$.

Una *línea de flujo* de un campo de velocidades marca la trayectoria seguida por una partícula del fluido moviéndose en dicho campo, de forma que los vectores que



representan al campo de velocidades son tangentes a las líneas de flujo. La representación por medio de líneas de flujo es usada, por ejemplo, para mostrar el movimiento de un fluido alrededor de un objeto (como el ala de un avión); las corrientes oceánicas también se representan en mapas mediante líneas de flujo, así como las térmicas que son columnas de aire ascendente utilizadas por las aves para planear, y también para vuelos de aladeltas, parapentes y planeadores sin motor.



El siguiente recurso permite simular el movimiento de varias partículas en un fluido multicolor. La imagen que se forma con las líneas de flujo puede ser muy atractiva.



<https://ggbm.at/xkqBVMr6>

Campo de fuerzas

La fuerza de atracción gravitatoria entre dos objetos de masas M y m actúa a lo largo de la recta (imaginaria) que los une y está dada en módulo por

$$|\vec{F}_g| = G \frac{Mm}{r^2}$$

donde r es la distancia entre los objetos, y $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$ es la llamada constante de gravitación, de acuerdo a la ley de gravitación universal de Newton.

Supongamos que el objeto de masa M está ubicado en el origen y el objeto de masa m está en el punto (x, y, z) . La distancia entre ellos es entonces $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y la recta de acción está determinada por el vector (unitario) $\check{r} = \frac{\check{i}x + \check{j}y + \check{k}z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Podemos escribir el campo de fuerza gravitatoria que sufre la masa m debido a la masa M , en términos de sus funciones componentes como

$$\vec{F}_g(x, y, z) = -\check{i}GMm \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \check{j}GMm \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \check{k}GMm \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

donde el signo $-$ indica que la fuerza es atractiva (hacia el origen, que es donde está M).

Este campo de fuerzas se representa gráficamente mediante flechas en dirección radial apuntando hacia el origen de coordenadas, de longitud cada vez menor a medida que el objeto m se ubica más alejado del objeto M .

Otro ejemplo es la fuerza peso (fuerza de atracción gravitatoria que sufre una masa m muy cerca de la superficie terrestre), que da lugar a un campo vectorial con una única componente no nula, de valor constante:

$$\vec{F}_p = -\check{k}mg$$

donde $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ es la aceleración de la gravedad. ¿Cómo se representa gráficamente?

La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales Q (ubicada en el origen) y q (ubicada en el punto (x, y, z)) puede ser atractiva (cuando ambas cargas tienen signos opuestos) o repulsiva (cuando tienen el mismo signo). Según la ley de Coulomb, la fuerza que sufre la carga q debido a la carga Q es el campo vectorial

$$\vec{F}_e(x, y, z) = \varepsilon \frac{Qq}{r^2} \check{r} = \varepsilon Qq \frac{\check{i}x + \check{j}y + \check{k}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

donde ε es una constante. ¿Cuál es la diferencia con la representación gráfica de la fuerza gravitatoria?

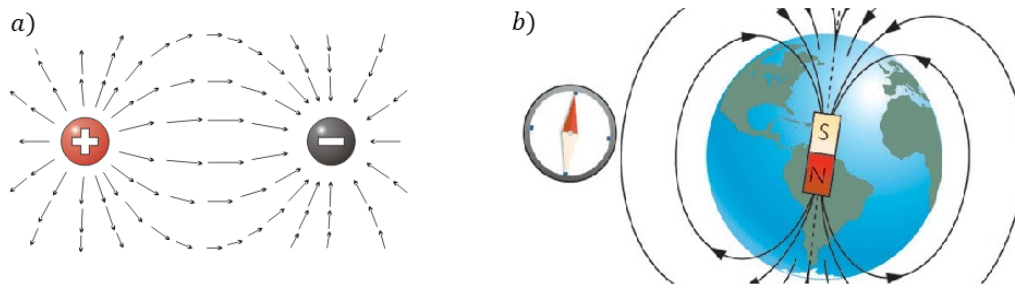


Figura 6.1.4: a) Líneas del campo eléctrico producido por un dipolo. b) Líneas del campo magnético terrestre.

Campo gradiente

En el Capítulo 3 hemos usado campos vectoriales: efectivamente dada una función escalar f , su gradiente está definido para cada punto dando como resultado un vector.

Si $f(x, y, z)$ es una función escalar dada en $E \subset \mathbb{R}^3$, que admite derivadas parciales primeras, se define el vector gradiente de f en cada punto $(x, y, z) \in E$ como

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \check{i}f_x(x, y, z) + \check{j}f_y(x, y, z) + \check{k}f_z(x, y, z)$$

Vemos que $\vec{F}_f = \vec{\nabla} f$ es un campo vectorial en $E \subset \mathbb{R}^3$, que se denomina *campo vectorial gradiente*.

Si $f(x, y)$ es una función escalar definida en $D \subset \mathbb{R}^2$, entonces

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \check{i}f_x(x, y) + \check{j}f_y(x, y)$$

es un *campo vectorial gradiente* en $D \subset \mathbb{R}^2$.

Recordemos que definimos el “operador diferencial vectorial” (nabla) como

$$\vec{\nabla} = \check{i}\frac{\partial}{\partial x} + \check{j}\frac{\partial}{\partial y} + \check{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Representación gráfica de un campo gradiente

Discuta el siguiente enunciado:

La representación gráfica de un campo gradiente en el espacio (o en el plano) puede darse por medio de vectores que son perpendiculares a las superficies (o curvas) de nivel de la función escalar f de la cual deriva el campo.

La función f recibe el nombre de *función potencial* y sus superficies (o curvas) de nivel se llaman, precisamente, *superficies (o curvas) equipotenciales*, y brindan una representación gráfica alternativa para el campo vectorial. Si la función es diferenciable, su gradiente posee la propiedad, ya vista, de que los vectores serán perpendiculares a las superficies (o las curvas) de nivel. El sentido de cada vector estará determinado por la dirección en la que crece la función f .

En la Figura 6.1.5 se representan en forma simultánea varias curvas de nivel de la función escalar $f(x, y) = -x^2 - y^2$, junto con varios vectores correspondientes a su campo vectorial gradiente $\vec{F}(x, y) = -\check{i}2x - \check{j}2y$.

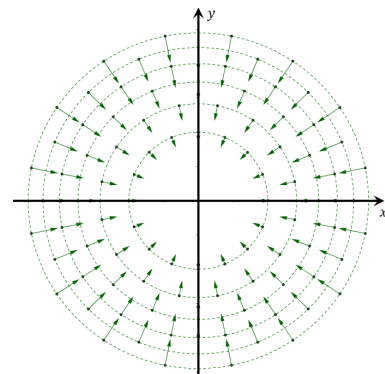


Figura 6.1.5: Curvas de nivel de la función $f(x, y) = -x^2 - y^2$ y su campo gradiente asociado $\vec{F}(x, y) = -\check{i}2x - \check{j}2y$.

■ **Ejemplo 6.1.7** Para cada una de las siguientes funciones escalares, obtenga el campo vectorial gradiente: a) $f(x, y) = \ln(x + 2y)$; b) $g(x, y, z) = x \cos \frac{y}{z}$

a) El dominio de la función f (y de sus derivadas parciales) es la región del plano $D = \{(x, y) : x + 2y > 0\}$, esto es, por encima de la recta $y = -\frac{1}{2}x$ (grafique el dominio). Calculando las derivadas parciales, se tiene el campo vectorial gradiente de f en D dado por

$$\vec{F}(x, y) = \vec{\nabla}f(x, y) = \check{i} \frac{1}{x + 2y} + \check{j} \frac{2}{x + 2y}.$$

b) La función g está definida en la región $E = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \neq 0\}$, o sea, en todo el espacio excepto el plano xy . El campo vectorial gradiente que deriva de esta función escalar es

$$\vec{G}(x, y, z) = \vec{\nabla}g(x, y, z) = \check{i} \cos \frac{y}{z} - \check{j} \frac{x}{z} \operatorname{sen} \frac{y}{z} + \check{k} \frac{xy}{z^2} \operatorname{sen} \frac{y}{z}, \quad (x, y, z) \in E.$$

■

Campo vectorial conservativo y función potencial

Estudiaremos una clase particular de campos vectoriales, que tiene importancia en aplicaciones físicas: los llamados *campos vectoriales conservativos*. Damos ahora su definición y más adelante veremos un teorema que da una condición suficiente para determinar si un dado campo vectorial es conservativo o no.

Definición Un campo vectorial \vec{F} se dice *conservativo en E* si es el gradiente de alguna función escalar, es decir, si existe una función f tal que $\vec{F} = \vec{\nabla}f$ para todo punto de E . En tal caso, f se llama *función potencial de \vec{F}* .

Ⓒ Observamos que si $f(x, y)$ es una función potencial del campo vectorial conservativo $\vec{F}(x, y) = \check{i}P(x, y) + \check{j}Q(x, y)$ en el plano, entonces:

$$P(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Ejercicio Escriba relaciones similares para el caso de un campo vectorial conservativo en el espacio.

Un campo gradiente es conservativo por definición, y la función de la cual derivan es una función potencial (notar que ésta queda definida a menos de una constante, o sea que en realidad se tiene una *familia de funciones potenciales*).

Se puede probar que los campos de fuerza gravitatoria \vec{F}_g y eléctrica \vec{F}_e son ambos conservativos, y que la función potencial en estos casos es de la forma $f(x, y, z) = \frac{K}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + c$, donde K es

GMm ó $-\varepsilon Qq$ de acuerdo al problema, y la constante c es arbitraria. En física, para campos de fuerza conservativos, se define una cantidad llamada *energía potencial U* de manera que $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ (entonces $-U$ juega el papel de la función potencial f dada aquí).

■ **Ejemplo 6.1.8** La fuerza de restitución elástica (en 1 dimensión) $\vec{F}(x) = -kx\check{i}$ es conservativa. En “lenguaje físico”, se dice que existe una función $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ (energía potencial elástica) tal que $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$. Aquí usamos el “lenguaje matemático” y diremos que existe una función $f(x) = -\frac{1}{2}kx^2$ (función potencial) tal que $\vec{F} = \vec{\nabla}f$. ■

■ **Ejemplo 6.1.9** Determine si $\vec{F}(x, y) = \check{i}ye^{xy} + \check{j}xe^{xy}$ es un campo vectorial conservativo en todo \mathbb{R}^2 .

De acuerdo a la definición, deberíamos encontrar una función escalar $f(x, y)$ tal que su gradiente es el campo dado. Por simple inspección, notamos que las derivadas parciales de la función exponencial e^{xy} dan las dos componentes del campo. Luego la familia de funciones potenciales de \vec{F} es

$$f(x, y) = e^{xy} + C$$

pues, efectivamente, $\vec{\nabla}f(x, y) = (ye^{xy}, xe^{xy}) = \vec{F}(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. ■

Veremos más adelante un método práctico para hallar una función potencial de un campo vectorial conservativo.

6.1.3 Derivadas de un campo vectorial

Un campo vectorial $\vec{F}(x, y, z)$ en el espacio posee tres funciones componentes, cada una de las cuales depende de tres variables: $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, y $R(x, y, z)$. Si queremos estudiar cambios del campo vectorial, notamos que debemos evaluar la variación de cada una de las funciones componentes respecto de cada una de las variables. En total tenemos nueve derivadas parciales primeras:



Resulta conveniente combinar estas derivadas en dos grupos: con tres de ellas se genera una magnitud escalar llamada *divergencia*, mientras que con las otras seis se genera una magnitud llamado *rotor* del campo.

Definición Dado un campo vectorial en el espacio, $\vec{F}(x, y, z) = \check{i}P(x, y, z) + \check{j}Q(x, y, z) + \check{k}R(x, y, z)$, se define la *divergencia* de \vec{F} como la función escalar de tres variables dada por

$$\text{div}(\vec{F}) = P_x + Q_y + R_z,$$

si las tres derivadas parciales existen.

Definición Dado un campo vectorial en el espacio, $\vec{F}(x, y, z) = \check{i}P(x, y, z) + \check{j}Q(x, y, z) + \check{k}R(x, y, z)$, se define el *rotor* (o rotacional) de \vec{F} como el nuevo campo vectorial en el espacio dado por

$$\text{rot}(\vec{F}) = \check{i}(R_y - Q_z) - \check{j}(R_x - P_z) + \check{k}(Q_x - P_y),$$

si las seis derivadas parciales existen.

Veamos algunos ejemplos y propiedades de la divergencia y el rotor de un campo vectorial.

Ⓒ **Notación para la divergencia:** Usando el operador diferencial vectorial (nabla), se puede escribir simbólicamente la divergencia de un campo vectorial como un “producto escalar entre el operador nabla y el campo”. Se denota la divergencia de \vec{F} como:

$$\text{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\check{i} \frac{\partial}{\partial x} + \check{j} \frac{\partial}{\partial y} + \check{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\check{i}P + \check{j}Q + \check{k}R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

- **Ejemplo 6.1.10** Calcule la divergencia del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = \check{i} e^x z \operatorname{sen} y + \check{j} e^x z \operatorname{cos} y + \check{k} x^2 y^2 z^2$.

Se tiene que, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la divergencia del campo \vec{F} es la siguiente función escalar de 3 variables:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{F}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial(e^x z \operatorname{sen} y)}{\partial x} + \frac{\partial(e^x z \operatorname{cos} y)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2 y^2 z^2)}{\partial z} \\ &= e^x z \operatorname{sen} y - e^x z \operatorname{sen} y + 2x^2 y^2 z = 2x^2 y^2 z. \end{aligned}$$

■

Definición — Campo vectorial incompresible. Si $\vec{F} : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow V_3$ es un campo vectorial tal que $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$ para todo $(x, y, z) \in E$, se dice que \vec{F} es un campo vectorial *incompresible* en E .

Ejercicio Dé un ejemplo de campo incompresible en \mathbb{R}^3 .

- Ⓒ **Notación para el rotor:** Usando el operador diferencial vectorial (nabla), se puede escribir simbólicamente el rotor de un campo vectorial como un “producto vectorial entre el operador nabla y el campo”. Se denota el rotor de \vec{F} como:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \check{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \check{j} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \check{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

- **Ejemplo 6.1.11** Calcule el rotor del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = \check{i} e^x z \operatorname{sen} y + \check{j} e^x z \operatorname{cos} y + \check{k} x^2 y^2 z^2$.

Se tiene que, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, el rotor del campo \vec{F} es el siguiente nuevo campo vectorial de 3 componentes:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \check{i} \left(\frac{\partial(x^2 y^2 z^2)}{\partial y} - \frac{\partial(e^x z \operatorname{cos} y)}{\partial z} \right) - \check{j} \left(\frac{\partial(x^2 y^2 z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(e^x z \operatorname{sen} y)}{\partial z} \right) \\ &\quad + \check{k} \left(\frac{\partial(e^x z \operatorname{cos} y)}{\partial x} - \frac{\partial(e^x z \operatorname{sen} y)}{\partial y} \right) \\ &= \check{i}(2x^2 y z^2 - e^x \operatorname{cos} y) + \check{j}(-2x y^2 z^2 + e^x \operatorname{sen} y) + \check{k} 0. \end{aligned}$$

■

Definición — Campo vectorial irrotacional. Si $\vec{F} : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow V_3$ es un campo vectorial tal que $\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ para todo $(x, y, z) \in E$, se dice que \vec{F} es un campo vectorial *irrotacional* en E .

Ejercicio Dé un ejemplo de campo irrotacional en \mathbb{R}^3 .

En el caso de un campo vectorial $\vec{F}(x, y) = \check{i}P(x, y) + \check{j}Q(x, y)$ en el plano, la divergencia y el rotor se definen de manera similar, a partir de las cuatro derivadas parciales primeras:

$$\begin{matrix} \textcircled{P_x} & \textcircled{P_y} & \textcircled{Q_x} & \textcircled{Q_y} \end{matrix}$$

Se define la *divergencia* de \vec{F} en el plano como la función escalar de dos variables dada por

$$\text{div}(\vec{F}) = P_x + Q_y,$$

y se define el *rotor* de \vec{F} en el plano como el nuevo campo vectorial en el espacio a lo largo del eje z dado por

$$\text{rot}(\vec{F}) = \check{k}(Q_x - P_y).$$

Ejercicio Discuta estas definiciones teniendo en cuenta el comentario de la Sección 6.1.1 sobre identificar campos en \mathbb{R}^2 como caso particular de campos vectoriales en \mathbb{R}^3 .



Busque entre los recursos en línea de GeoGebra, alguna actividad que permita calcular y visualizar la divergencia y el rotor de un campo vectorial en el plano.

■ **Ejemplo 6.1.12** Dado el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = \check{i}\ln(x^2 + y^4) + \check{j}(\frac{1}{2} + 8xy)$, definido para todo $(x, y) \neq (0, 0)$, resulta que $\text{div}(\vec{F}) = \frac{2x}{x^2 + y^4} + 8x$, mientras que $\text{rot}(\vec{F}) = \check{k}\left(8y - \frac{4y^3}{x^2 + y^4}\right)$ para todos los puntos del plano excepto el origen. ■

Ejercicio Dé ejemplos de campos incompresibles y/o irrotacionales en \mathbb{R}^2 .

Teorema 6.1.1 – Propiedades para un campo vectorial gradiente. Sea $f(x, y, z)$ una función escalar de clase C^2 , entonces:

a) la divergencia del campo gradiente de f da como resultado el *laplaciano* de f :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz};$$

b) el rotor del campo gradiente de f da como resultado el vector nulo:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0}.$$

Ejercicio Pruebe ambos resultados. ¿Qué teorema utiliza para la demostración?

Campo vectorial conservativo y rotor

Teorema 6.1.2 – Condición necesaria. Sea $\vec{F} = (P, Q, R)$ un campo vectorial de clase C^1 en el dominio $E \subset \mathbb{R}^3$. Si \vec{F} es conservativo en E , entonces \vec{F} es irrotacional en E . Simbólicamente:

$$\text{Si } \vec{F} = \vec{\nabla} f \text{ en } E \subset \mathbb{R}^3, \text{ entonces } \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0} \text{ en } E \subset \mathbb{R}^3.$$



La contrarrecíproca de este teorema es muy útil para determinar cuándo un campo vectorial no es conservativo: si $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq \vec{0}$ en $E \subset \mathbb{R}^3$, entonces \vec{F} no es conservativo en $E \subset \mathbb{R}^3$.

El teorema anterior afirma que: una condición necesaria para que un campo vectorial sea conservativo en una región, es que sea irrotacional en dicha región. El siguiente teorema da condiciones suficientes, sobre todo \mathbb{R}^3 :

Teorema 6.1.3 – Condiciones suficientes. Sea $\vec{F} = (P, Q, R)$ un campo vectorial. Si \vec{F} es irrotacional en \mathbb{R}^3 y además sus funciones componentes son de clase C^1 en todo \mathbb{R}^3 , entonces \vec{F} es conservativo en \mathbb{R}^3 .

C Más adelante veremos un teorema similar, válido para campos vectoriales de dos componentes en regiones planas.

6.1.4 Ejercicios

1. Describa el campo vectorial dado, y grafique trazando algunos vectores representativos en el plano:

a) $\vec{F}(x, y) = \check{i}x + \check{j}y$

b) $\vec{F}(x, y) = \check{i}y + \check{j}$

c) $\vec{F}(x, y) = \frac{-\check{i}y + \check{j}x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ con $(x, y) \neq (0, 0)$

2. Describa el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = \check{i}x + \check{j}z + \check{k}y$ en el espacio, y grafique trazando algunos vectores representativos.

3. Proporcione una expresión $\vec{F}(x, y) = \check{i}P(x, y) + \check{j}Q(x, y)$ para un campo vectorial en el plano con la propiedad de que \vec{F} apunte hacia el origen con una magnitud inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de (x, y) al $(0, 0)$. El campo no está definido en el origen.

4. Encuentre el campo vectorial gradiente que se obtiene a partir de la función escalar dada en cada caso:

a) $f(x, y) = \cosh(x + 2y)$

b) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

c) $f(x, y, z) = xyz + \frac{1}{2}z^2 + e^x \cos y$

5. Halle la divergencia y el rotor de los siguientes campos vectoriales:

a) $\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{3}(x\check{i} + y\check{j} + z\check{k})$

b) $\vec{F}(x, y, z) = xyz\check{i} - x^2y\check{k}$

c) $\vec{F}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}\check{i} + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}\check{j} + \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}\check{k}$

d) $\vec{F}(x, y) = -\frac{1}{2}y\check{i} + \frac{1}{2}x\check{j}$

6. Determine si el campo vectorial dado es o no conservativo en \mathbb{R}^3 .

a) $\vec{F}(x, y, z) = yz\check{i} + xz\check{j} + xy\check{k}$

b) $\vec{F}(x, y, z) = 2xy\check{i} + (x^2 + 2yz)\check{j} + y^2\check{k}$

c) $\vec{F}(x, y, z) = e^x\check{i} + e^z\check{j} + e^y\check{k}$

d) $\vec{F}(x, y, z) = (xz, xyz, -y^2)$

7. Muestre que cualquier campo vectorial de la forma

$$\vec{F}(x, y, z) = p(y, z)\check{i} + q(x, z)\check{j} + r(x, y)\check{k}$$

donde p, q y r son funciones diferenciables, es incompresible.

8. Muestre que cualquier campo vectorial de la forma

$$\vec{F}(x, y, z) = p(x)\check{i} + q(y)\check{j} + r(z)\check{k}$$

donde p, q y r son funciones derivables en \mathbb{R} , es irrotacional en \mathbb{R}^3 .

6.2 Integral de línea de un campo vectorial. Teorema Fundamental

Un concepto muy utilizado en Física es el de *trabajo de una fuerza* al mover un objeto de un punto a otro del espacio. Sabemos que, en el caso particular en que la fuerza \vec{F} es constante y el movimiento es en línea recta con un desplazamiento \vec{d} , el trabajo se calcula como el producto escalar $\vec{F} \cdot \vec{d}$. Veamos cómo se define y calcula el trabajo en el caso general de un campo de fuerzas variable, cuando el objeto se mueve siguiendo una trayectoria arbitraria. Para ello, introduciremos la noción de integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva.

Consideremos una curva suave C (en el espacio), parametrizada por la función vectorial $\vec{r}(t)$ que es continua en $[a, b]$ y tal que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ para todo $t \in [a, b]$. Tal como hicimos para definir integral de línea de una función escalar, dividimos la curva C en subarcos y aproximamos la curva por una poligonal formada por pequeños segmentos de longitud Δs . Si Δs es muy pequeño, entonces cuando el objeto se mueve de un extremo al otro del i -ésimo subarco, avanza aproximadamente en la dirección tangente a la curva, dada por $\vec{T}(t_i) = \frac{\vec{r}'(t_i)}{|\vec{r}'(t_i)|}$. ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza \vec{F} para mover el objeto, a lo largo del subarco? Es aproximadamente el producto escalar de la fuerza por el vector desplazamiento en ese tramo:

$$\vec{F}(x_i, y_i, z_i) \cdot \left[\Delta s \frac{\vec{r}'(t_i)}{|\vec{r}'(t_i)|} \right] = \left[\vec{F}(x_i, y_i, z_i) \cdot \frac{\vec{r}'(t_i)}{|\vec{r}'(t_i)|} \right] \Delta s.$$

Esto puede interpretarse como el valor de la componente tangencial del campo $\vec{F} \cdot \vec{T}$, multiplicada por la longitud Δs del elemento de arco.

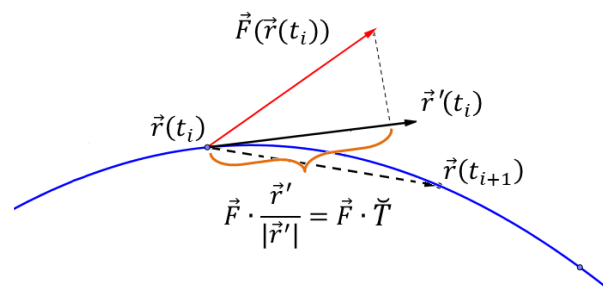


Figura 6.2.1: Cada elemento de arco aporta al trabajo una cantidad dada por el valor de la componente tangencial del campo multiplicada por la longitud del elemento de arco.

El trabajo total del campo para mover el objeto a lo largo de la curva puede aproximarse mediante la suma de Riemann sobre todos los subarcos. Luego, el trabajo W realizado por el campo de fuerzas \vec{F} a lo largo de la curva C , se define como el límite de las sumas de Riemann. Escribimos simbólicamente:

$$W = \int_C \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{T}(x, y, z) ds$$

donde $\vec{F}(x, y, z)$ es el campo vectorial y $\vec{T}(x, y, z)$ es el vector tangente unitario en el punto (x, y, z) de C . Notemos que esta expresión indica que el trabajo de una fuerza es la integral de línea con respecto a la longitud de arco, de la componente tangencial de la fuerza. Usando que $\Delta s = |\vec{r}'(t)| dt$ podemos escribir:

$$W = \int_a^b \left[\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \right] (|\vec{r}'(t)|) dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt.$$

Llegamos a la definición de integral de línea de un campo vectorial:

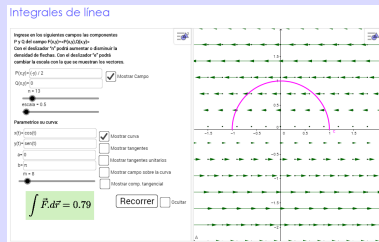
Definición Sea \vec{F} un campo vectorial continuo, y sea C una curva suave. Sea $\vec{r}(t)$ con $t \in [a, b]$, una parametrización de C . Se define la *integral de línea de \vec{F} a lo largo de C* como

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

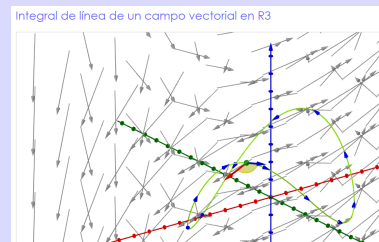
Notar que $\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{F}(x(t), y(t), z(t))$.



Los siguientes recursos permiten calcular la integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva, en el plano y en el espacio. Además, muestran de manera interesante, los vectores que representan al campo y los vectores tangentes a la curva, punto a punto, y el ángulo que forman.



<https://ggbm.at/trPACtJS>



<https://ggbm.at/v7faA84Z>

- **Ejemplo 6.2.1** Evalúe $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}$, a lo largo del tramo de hélice C dado por $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t\vec{k}$, con $t \in [0, \pi/2]$.

Para aplicar la definición de integral de línea, calculamos

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}(t)) &= x(t)\vec{i} + z(t)\vec{j} + y(t)\vec{k} = \cos t\vec{i} + t\vec{j} + \sin t\vec{k}, \\ \vec{r}'(t) &= -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} + \vec{k}.\end{aligned}$$

Luego tenemos

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{\pi/2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} [\cos t(-\sin t) + t \cos t + \sin t] dt = \left[\frac{\cos^2 t}{2} + t \sin t \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

■

- **Ejemplo 6.2.2** Encuentre el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = (y - x^2)\vec{i} + (z - y^2)\vec{j} + (x - z^2)\vec{k}$, para mover un objeto desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$ a lo largo de la curva paramétrica C definida por $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$.

El trabajo de una fuerza \vec{F} a lo largo de una curva C está definido como

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

para lo cual calculamos

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}(t)) &= (t^2 - t^2)\vec{i} + [t^3 - (t^2)^2]\vec{j} + [t - (t^3)^2]\vec{k} = (t^3 - t^4)\vec{j} + (t - t^6)\vec{k}, \\ \vec{r}'(t) &= \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}.\end{aligned}$$

Notamos que el punto inicial de la curva corresponde a $t = 0$ y el punto final a $t = 1$. Luego resulta

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^1 [(t^3 - t^2)2t + (t - t^6)3t^2] dt \\ &= \int_0^1 (2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8) dt = \frac{29}{60} \end{aligned}$$

expresado en Joules (1 J=1 N m) en el sistema MKS de unidades. ■

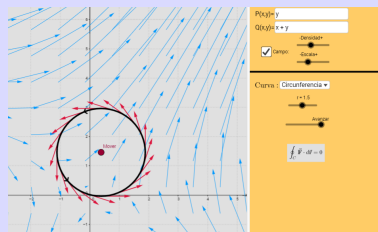
- Ⓒ Puede ocurrir que la curva C sea cerrada (por ejemplo, una curva en el plano que sea la frontera de una región plana). En estos casos, la integral de línea recibe el nombre de *circulación* del campo vectorial, y es común usar una notación especial:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

para indicar explícitamente que C es cerrada.



Con el siguiente recurso se puede calcular la integral de línea de cualquier campo en \mathbb{R}^2 a lo largo de cualquier segmento recto, semicircunferencia o circunferencia.



<https://ggbm.at/bspB37mm>

Teorema 6.2.1 Se pueden demostrar las siguientes propiedades, válidas tanto para campos vectoriales de 2 variables y curvas en el plano, como para campos vectoriales de 3 variables y curvas en el espacio:

1. El valor de la integral de línea de un campo vectorial no depende de la parametrización utilizada para la curva, siempre que ésta sea recorrida una sola vez.
2. La integral de línea de un campo vectorial en una curva formada por dos tramos, es igual a la suma de las integrales de línea de dicha función a lo largo de cada tramo. Simbólicamente,

$$\int_{C_1 \cup C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

3. La integral de línea de un campo vectorial depende del sentido de recorrido de la curva. Simbólicamente,

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde $-C$ indica la misma curva que C pero en sentido opuesto.

- Ⓒ Justifique que la propiedad dada se cumple para cualquier campo vectorial. Proponga algunos ejemplos particulares y, usando el recurso <https://ggbm.at/bspB37mm>, observe cómo cambia el signo de la integral al invertir el sentido de recorrido de la curva.

6.2.1 Ejercicios

- Calcule la integral de línea de \vec{F} a lo largo de la curva C definida por la función vectorial $\vec{r}(t)$ indicada en cada caso. Chequee sus resultados usando Geogebra.
 - $\vec{F}(x, y, z) = xy\vec{i} + y\vec{j} - yz\vec{k}$, $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t\vec{k}$, con $0 \leq t \leq 1$
 - $\vec{F}(x, y, z) = 2y\vec{i} + 3x\vec{j} + (x+y)\vec{k}$, $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + \frac{1}{6}t\vec{k}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$
- Evalúe $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para el campo vectorial $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ a lo largo del tramo C de la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ desde $(1, 0)$ hasta $(0, 1)$, en el sentido contrario a las agujas del reloj.
- Encuentre el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = 3y\vec{i} + 2x\vec{j} + 4z\vec{k}$ desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$, a lo largo de cada una de las siguientes curvas (grafique cada una):
 - la línea recta C_1 dada por $\vec{r}_1(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k}$, con $0 \leq t \leq 1$
 - la curva C_2 dada por $\vec{r}_2(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^4\vec{k}$, con $0 \leq t \leq 1$
 - la trayectoria $C_3 \cup C_4$, formada por el segmento de recta C_3 desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 0)$ seguido por el segmento C_4 desde $(1, 1, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$.
- Calcule la circulación $\oint_C [x\vec{i} + y\vec{j}] \cdot d\vec{r}$, donde C es la elipse parametrizada por $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + 4\sin t\vec{j}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$.

6.2.2 Teorema fundamental para integrales de línea

El Teorema Fundamental del Cálculo estudiado en Análisis Matemático I, aplicado a una función $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, con derivada continua en el intervalo $[a, b]$, se escribe como:

$$\int_a^b g'(x) dx = g(b) - g(a).$$

Este resultado afirma que el valor de la integral de $g'(x)$ depende sólo del valor de g en los puntos extremos del intervalo de integración, quedando completamente determinado por $g(a)$ y $g(b)$.

Pensemos ahora en una función f de dos o tres variables, de clase C^1 . El gradiente de f se forma con sus derivadas parciales y da lugar a un campo vectorial: el campo de gradientes de f que, de alguna manera generaliza el concepto de derivada para el caso de funciones de más de una variable. A partir de esto, uno se podría preguntar si el Teorema Fundamental del Cálculo también se puede generalizar, esto es: ¿queda determinado el valor de la integral de línea de $\vec{\nabla}f$ a lo largo de una curva C , en el plano o en el espacio, sólo por el valor de f en los puntos extremos de la curva C ?

Expresemos más formalmente la situación para el caso de una función de tres variables. Sea C una curva determinada por la función vectorial $\vec{r}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, que va desde el punto inicial $\vec{r}(a)$ hasta el punto final $\vec{r}(b)$. Sea $f(x, y, z)$ una función con gradiente continuo (esto es, f es de clase C^1) para todos los puntos de C . Entonces, ¿el valor de la integral de línea $\int_C \vec{\nabla}f \cdot d\vec{r}$ queda completamente determinado por $f(\vec{r}(a))$ y $f(\vec{r}(b))$?

La respuesta está contenida en el siguiente teorema fundamental para integrales de línea:

Teorema 6.2.2 – Teorema Fundamental para integrales de línea. Sea C una curva suave (a trozos) determinada por la función vectorial $\vec{r}(t)$, con $a \leq t \leq b$. Sea f una función diferenciable de dos o de tres variables, cuyo vector gradiente $\vec{\nabla}f$ es continuo en C . Entonces

$$\int_C \vec{\nabla}f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$$

Demostración Lo demostraremos para funciones de tres variables $f(x, y, z)$ y curvas en el espacio $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, siendo similar la prueba para funciones de dos variables y curvas en el plano. Aplicando la definición de integral de línea para campos vectoriales, tenemos que:

$$\int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{\nabla} f \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt.$$

Recordando la regla de la cadena, notamos que la expresión entre paréntesis es la derivada respecto de t de la función compuesta $f(x(t), y(t), z(t))$. Luego, la integral puede escribirse como $\int_a^b \frac{d}{dt} [f(\vec{r}(t))] dt$. Por lo tanto

$$\int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{d}{dt} [f(\vec{r}(t))] dt = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)),$$

donde, en el último paso, aplicamos el Teorema Fundamental del Cálculo para una función de una variable.

Entonces, si $f : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es C^1 en E , y $C = C_{AB}$ es una curva suave en E que comienza en el punto A dado por $\vec{r}(a) = (x_A, y_A, z_A)$ y finaliza en el punto B dado por $\vec{r}(b) = (x_B, y_B, z_B)$, el Teorema Fundamental señala que:

$$\int_{C_{AB}} \vec{\nabla} f(x, y, z) \cdot d\vec{r} = f(x_B, y_B, z_B) - f(x_A, y_A, z_A).$$

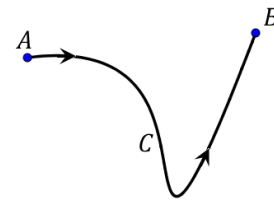


Figura 6.2.2: Curva con extremo inicial A y extremo final B

Similarmente, supongamos que $C = C_{AB}$ es una curva suave en $D \subset \mathbb{R}^2$, con extremo inicial A dado por $\vec{r}(a) = (x_A, y_A)$ y extremo final B dado por $\vec{r}(b) = (x_B, y_B)$, y que $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función con campo gradiente continuo en C . Entonces, el Teorema Fundamental da el valor de la integral de línea muy fácilmente:

$$\int_{C_{AB}} \vec{\nabla} f(x, y) \cdot d\vec{r} = f(x_B, y_B) - f(x_A, y_A).$$

Notamos que este Teorema Fundamental da un método práctico para obtener el valor de la integral de línea de ciertos campos vectoriales es, sin tener que calcular la integral de línea del campo por definición. Esto ocurre en el caso particular en que el campo vectorial es *conservativo*: cuando el campo es el gradiente de alguna función escalar (que es función potencial del campo).

Proposición 6.2.3 Si un campo vectorial \vec{F} de clase C^1 es conservativo en una región que contiene a una curva suave (a trozos) C que va de (x_A, y_A, z_A) a (x_B, y_B, z_B) , entonces

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(x_B, y_B, z_B) - f(x_A, y_A, z_A),$$

donde f es una función potencial de \vec{F} .

Luego podemos afirmar que: el trabajo de un campo de fuerzas conservativo se obtiene –sin necesidad de resolver la integral– conociendo solamente el valor de la función potencial f en los puntos extremos de la curva C .

En Física, verán que el trabajo sobre un objeto cuando es influenciado solamente por fuerzas *conservativas*, resulta igual a la disminución de energía potencial. Y que en estas situaciones la energía mecánica total se *conserva* a lo largo de la trayectoria.

■ **Ejemplo 6.2.3** Determinar el trabajo realizado por el campo conservativo $\vec{F} = yz \vec{i} + xz \vec{j} + xy \vec{k}$ a lo largo de una curva suave C_{AB} que une los puntos $A(-1, 3, 9)$ y $B(1, 6, -4)$, de A a B .

El trabajo realizado por el campo de fuerzas \vec{F} está definido por la integral de línea $\int_{C_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Como ya sabemos que el campo \vec{F} es conservativo, podemos aplicar el Teorema Fundamental para integrales de línea y evaluar el trabajo mediante los valores de la función potencial del campo \vec{F} en los extremos de la curva C_{AB} . Tenemos que calcular primero la función potencial, esto es la función f tal que $\vec{\nabla} f = \vec{F}$. En este caso es fácil darse cuenta (casi sin hacer cálculos) que $f(x, y, z) = xyz$ (a menos de una constante arbitraria), ya que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy,$$

que son justamente las funciones componentes del campo \vec{F} , con lo cual tenemos que $\vec{\nabla} f = \vec{F}$ en todo \mathbb{R}^3 . Ya estamos en condiciones entonces de obtener el trabajo:

$$W = \int_{C_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_{AB}} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A) = f(1, 6, -4) - f(-1, 3, 9) = 3.$$

■

6.2.3 Independencia de la trayectoria

Vimos que la integral de línea de un campo vectorial conservativo en una región D , a lo largo de una curva C , depende sólo del punto inicial y del punto final de la curva, sin importar la trayectoria o camino que conecta ambos puntos extremos de C . Con respecto a esto, daremos algunas definiciones:

Definición — Independencia de la trayectoria. Si \vec{F} es un campo vectorial continuo definido en una región D , diremos que la integral de línea de \vec{F} es *independiente de la trayectoria* en D , si $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para cualquier par de trayectorias C_1 y C_2 en D , que tengan *el mismo punto inicial y el mismo punto final*.

Ejercicio Justifique la siguiente propiedad: Si \vec{F} es un campo vectorial conservativo en una región D , entonces la integral de línea de \vec{F} es independiente de la trayectoria en D .

Recordemos que se dice que una curva C en D , parametrizada por la función vectorial $\vec{r}(t)$, con $a \leq t \leq b$, es *cerrada* si su *punto final* coincide con su *punto inicial*, esto es, si $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

Supongamos que \vec{F} es un campo vectorial continuo en una región D y que la integral de línea de \vec{F} es independiente de la trayectoria en D , nos preguntamos ¿qué valor toma $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ si C es una curva cerrada en D ?

Para analizar el valor de la integral de línea, elijamos dos puntos cualquiera A y B en la curva cerrada C y consideremos los dos trozos de curva en los que queda dividida C : la trayectoria C_1 que va desde A hasta B , y a continuación la trayectoria \bar{C}_2 que va desde B hasta A . Teniendo en cuenta que $C = C_1 \cup \bar{C}_2$, se tiene:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\bar{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Notemos que la trayectoria $-C_2$ (o sea, \bar{C}_2 recorrida en sentido inverso) va desde A hasta B , es decir que tiene punto inicial A y punto final B . Como hemos supuesto que las integrales de línea de \vec{F} son independientes de la trayectoria, se tiene $\int_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Resulta entonces:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

O sea que si la integral de línea de \vec{F} es independiente de la trayectoria en D , entonces el valor de la integral de línea de \vec{F} en cualquier curva cerrada en D , es cero.

Ahora veamos la situación recíproca: supongamos que $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para cualquier curva cerrada $C \subset D$, nos preguntamos ¿será la integral de línea de \vec{F} independiente de la trayectoria en D ?

Tomemos dos trayectorias cualquiera, C_1 y C_2 en la región D , que vayan ambas desde A hasta B , y llamemos C a la curva formada por C_1 (desde A hasta B) seguida por $-C_2$ (desde B hasta A). Como $C = C_1 \cup (-C_2)$, se tiene:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

pero como C es una curva cerrada en D , se tiene $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, por lo que resulta

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

donde C_1 y C_2 son un par de trayectorias cualesquiera de A a B .

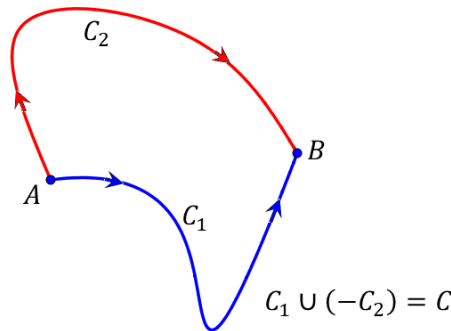


Figura 6.2.4: Dos caminos que comienzan en A y terminan en B , permiten obtener la curva cerrada C .

De esta forma hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 6.2.4 Supongamos que \vec{F} es un campo vectorial continuo en una región D . La integral de línea de \vec{F} es independiente de la trayectoria en D si y sólo si $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para cualquier curva cerrada C en D .

Ejercicio Justifique el siguiente corolario: Si \vec{F} es un campo vectorial conservativo en una región D , entonces la circulación de \vec{F} a lo largo de cualquier curva cerrada C en D se anula. Es decir:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Nos preguntamos ahora si existen otros campos vectoriales, distintos de los campos conservativos, tales que sus integrales de línea sean independientes de la trayectoria.

Enunciaremos el siguiente teorema, que afirma que los únicos campos vectoriales que son independientes de la trayectoria son los conservativos. En este teorema se supone que el campo \vec{F} está definido en una región D abierta y conexa. Decimos que una región abierta D es *conexa* si cualquier par de puntos de D se puede unir mediante una curva suave que se encuentra en D .

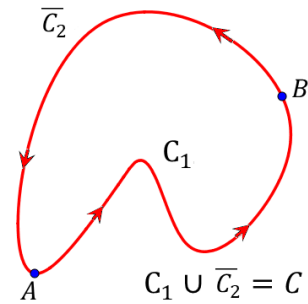


Figura 6.2.3: La curva cerrada C puede dividirse en dos tramos complementarios.

Teorema 6.2.5 Supongamos que \vec{F} es un campo vectorial continuo en una región abierta conexa D . Si la integral de línea de \vec{F} es independiente de la trayectoria en D , entonces \vec{F} es un campo vectorial conservativo en D , es decir, existe una función potencial f tal que $\vec{\nabla}f = \vec{F}$ en D .

Supongamos que \vec{F} es un campo vectorial continuo en una región abierta y conexa D puede ser $D = \mathbb{R}^2$, entonces el siguiente diagrama resume los resultados de los dos últimos teoremas:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ es independiente de la trayectoria en } D$$

si y sólo si

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \text{ para cualquier curva cerrada } C \text{ en } D$$

si y sólo si

$$\vec{F} \text{ es conservativo en } D \text{ (existe } f \text{ tal que } \vec{F} = \vec{\nabla}f)$$

C Dada la importancia que tienen los campos conservativos y observando la conveniencia y facilidad de evaluar integrales de línea de campos conservativos, nos formulamos dos preguntas:

- En la práctica, ¿cómo podemos determinar si un campo \vec{F} es conservativo o no?
- Si \vec{F} es un campo conservativo, ¿cómo encontramos una función potencial, es decir una función f tal que $\vec{F} = \vec{\nabla}f$?

Supongamos que se sabe que $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ es conservativo en $D \subset \mathbb{R}^2$, donde P y Q tienen derivadas parciales continuas de primer orden. Entonces existe una función f , tal que $\vec{F} = \vec{\nabla}f$. Igualando componente a componente, resulta:

$$P = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad y \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Por lo tanto, aplicando el teorema de Clairaut a la función potencial f , se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Tenemos entonces el siguiente teorema:

Teorema 6.2.6 – Condición necesaria. Supongamos que $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ es un campo vectorial conservativo en una región abierta $D \subset \mathbb{R}^2$, donde sus funciones componentes $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son de clase C^1 . Entonces se cumple que:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

para todo $(x, y) \in D$.

Este resultado expresa una condición necesaria para que un campo vectorial de 2 componentes sea conservativo. Sirve, por ejemplo, para demostrar cuando que un campo no es conservativo.

Buscamos ahora condiciones suficientes. Para ello necesitamos dos nuevos conceptos: *curva simple* y *región simplemente conexa*.

Definición — Curvas simples y regiones simplemente conexas. Una *curva simple* es una curva que no se corta a sí misma en ningún lugar. Una *región simplemente conexa* del plano es una región D conexa tal que toda curva cerrada simple en D puede contraerse a un punto sin salir de D . Intuitivamente, las regiones simplemente conexas son regiones sin agujeros que puedan ser atrapados por una curva cerrada, y no puede estar formada por piezas separadas. Por ejemplo, todo el plano es una región simplemente conexa.

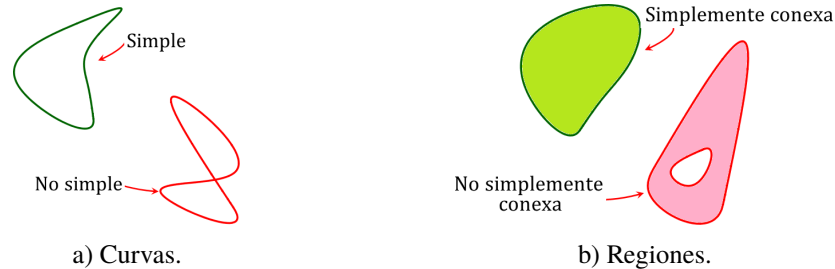


Figura 6.2.5: Curvas simples y regiones simplemente conexas.

Enunciamos entonces un teorema para regiones D simplemente conexas, que da un método adecuado para comprobar si un campo vectorial en una región de \mathbb{R}^2 es conservativo:

Teorema 6.2.7 – Condiciones suficientes. Sea $\vec{F}(x, y) = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$ un campo vectorial definido en una región plana D abierta y simplemente conexa del plano. Si sus funciones componentes $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son de clase C^1 en D y satisfacen $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ para todo $(x, y) \in D$, entonces \vec{F} es un campo conservativo en D .

Notar que las hipótesis de este teorema de condiciones suficientes son: las componentes P y Q del campo deben ser de clase C^1 , con $Q_x = P_y$, y además, la región donde está definido el campo debe ser abierta y simplemente conexa.

■ **Ejemplo 6.2.4** Determinar si el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = e^{xy} \vec{i} + e^{x+y} \vec{j}$ es o no un campo conservativo en su dominio.

\vec{F} es un campo vectorial definido y continuo en todo el plano, por lo que su dominio es $D = \mathbb{R}^2$. Las funciones componentes de \vec{F} son: $P(x, y) = e^{xy}$ y $Q(x, y) = e^{x+y}$, con derivadas parciales continuas en D . En primer lugar calculamos $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$, porque en el caso de que ambas derivadas parciales no coincidan en D , el campo no será conservativo (justificar).

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x e^{xy}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^{x+y}.$$

Si \vec{F} fuera conservativo, se debería cumplir: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en todo D . Por lo tanto, \vec{F} no es conservativo en D . ■

En el siguiente ejemplo, mostramos un método llamado técnica de integraciones parciales para hallar una función potencial para un campo conservativo en el plano.

■ **Ejemplo 6.2.5** Considerar el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = 2x \cos y \vec{i} - x^2 \sin y \vec{j}$.

- a) Determinar si \vec{F} es un campo conservativo en su dominio D .
- b) Si \vec{F} es un campo conservativo en D , encontrar una función potencial para \vec{F} .

c) Obtener $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde C es la curva definida por $\vec{r}(t) = e^{t-1} \vec{i} + \text{sen}(\frac{\pi}{t}) \vec{j}$, con $t \in [1, 2]$.

a) \vec{F} es un campo vectorial continuo en todo el plano, por lo que su dominio es $D = \mathbb{R}^2$. Las funciones componentes de \vec{F} son: $P(x, y) = 2x \cos y$ y $Q(x, y) = -x^2 \text{sen } y$, que tienen derivadas parciales continuas en \mathbb{R}^2 . En primer lugar calculamos $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2x \text{sen } y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x \text{sen } y.$$

Al ser $D = \mathbb{R}^2$ una región abierta y simplemente conexa, se puede aplicar el teorema “de suficiencia” 6.2.7: teniendo en cuenta que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en \mathbb{R}^2 deducimos que \vec{F} es un campo vectorial conservativo en \mathbb{R}^2 . O sea que \vec{F} tiene función potencial f , de modo que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ en \mathbb{R}^2 .

b) Para encontrar la función potencial vamos a desarrollar los siguientes pasos:

i) Partimos de la igualdad: $\vec{\nabla} f = \vec{F}$, es decir,

$$f_x(x, y) = P(x, y) = 2x \cos y, \quad f_y(x, y) = Q(x, y) = -x^2 \text{sen } y.$$

ii) Integrando la primera de estas relaciones con respecto a x , obtenemos:

$$f(x, y) = x^2 \cos y + h(y).$$

Notar que la “constante de integración” es constante con respecto a x , es decir es alguna expresión que depende solamente de y , a la que llamamos $h(y)$.

iii) A continuación derivamos esta expresión con respecto a y (para comparar con la expresión que ya tenemos de f_y):

$$f_y(x, y) = -x^2 \text{sen } y + h'(y).$$

iv) Comparando, resulta que $h'(y) = 0$; por lo tanto $h(y) = c$, donde c es un valor constante.

v) Reemplazando en $f(x, y)$ tenemos que,

$$f(x, y) = x^2 \cos y + c$$

es una función potencial de \vec{F} en \mathbb{R}^2 . Verificar que el gradiente de f da el campo \vec{F} .

c) Como $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ es un campo vectorial continuo, podemos aplicar el teorema fundamental para integrales de línea. Es decir que,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(2)) - f(\vec{r}(1))$$

donde hemos usado el hecho que la curva C comienza en $\vec{r}(1)$ y termina en $\vec{r}(2)$. Ahora calculamos:

$$\vec{r}(1) = \left(e^{1-1}, \text{sen}\left(\frac{\pi}{1}\right) \right) = (1, 0), \quad \text{y} \quad \vec{r}(2) = \left(e^{2-1}, \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = (e, 1).$$

Con lo cual:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(e, 1) - f(1, 0) = e^2 \cos(1) - 1$$

■

Evidentemente, para obtener el valor de la integral de línea de un campo vectorial conservativo, es más sencillo resolver por teorema que por definición de integral de línea.

Supongamos que $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ es un campo vectorial conservativo en una región sólida $E \subset \mathbb{R}^3$. ¿Cuál es el método para hallar una función potencial de \vec{F} ? El siguiente ejemplo muestra que la técnica para encontrar la función potencial es muy semejante a la utilizada para campos vectoriales conservativos de \mathbb{R}^2 .

■ **Ejemplo 6.2.6** Determinar una función potencial para el campo vectorial conservativo $\vec{F}(x, y, z) = (e^x \cos y + yz)\vec{i} + (xz - e^x \sin y)\vec{j} + (xy + z)\vec{k}$.

Las funciones componentes de \vec{F} son:

$$P(x, y, z) = e^x \cos y + yz, \quad Q(x, y, z) = xz - e^x \sin y \quad R(x, y, z) = xy + z.$$

i) Como \vec{F} es un campo conservativo, entonces existe una función potencial f que satisface: $\vec{\nabla}f = \vec{F}$. Esto significa que:

$$f_x(x, y, z) = e^x \cos y + yz, \quad f_y(x, y, z) = xz - e^x \sin y, \quad f_z(x, y, z) = xy + z.$$

ii) Integrando f_x con respecto a x , obtenemos

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + yzx + g(y, z)$$

donde la “constante de integración” es constante con respecto a x , pero es alguna expresión que depende sólo de las variables y y z , a la que hemos llamado $g(y, z)$.

iii) Derivando la última ecuación con respecto a y , obtenemos:

$$f_y(x, y, z) = -e^x \sin y + zx + g_y(y, z).$$

iv) La comparación con la f_y que ya teníamos da: $g_y(y, z) = 0$; por lo tanto $g(y, z) = h(z)$.

v) Reemplazando en $f(x, y, z)$ tenemos ahora

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + yzx + h(z).$$

vi) Derivando ahora esta expresión con respecto a z y comparando con la f_z que ya teníamos, obtenemos $h'(z) = z$ y por lo tanto $h(z) = \frac{z^2}{2} + c$, donde c es un valor constante.

vii) Así, una función potencial de \vec{F} en \mathbb{R}^3 es:

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + yzx + \frac{z^2}{2} + c.$$

Verificar que el gradiente de f da el campo \vec{F} . ■

6.2.4 Ejercicios

- En los siguientes casos, determine si \vec{F} es un campo vectorial conservativo en todo el plano:
 - $\vec{F}(x, y) = (x^3 + 4xy)\vec{i} + (4xy - y^3)\vec{j}$
 - $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$
 - $\vec{F}(x, y) = (ye^x + \sin y)\vec{i} + (e^x + x \cos y)\vec{j}$
- Determine si los siguientes campos vectoriales son conservativos en su dominio, y en caso afirmativo halle una función potencial:
 - $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + x\vec{j}$
 - $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + \vec{j}$
 - $\vec{F}(x, y) = (x - 2xy)\vec{i} + (y^2 - x^2)\vec{j}$
 - $\vec{F}(x, y, z) = (4x - z)\vec{i} + (3y + z)\vec{j} + (y - x)\vec{k}$
- Muestre que el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (1 + xy)e^{xy}\vec{i} + (e^y + x^2e^{xy})\vec{j}$ es conservativo en todo \mathbb{R}^2 , y halle la familia de funciones potenciales para \vec{F} .

4. Encuentre la familia de funciones potenciales para los siguientes campos vectoriales conservativos y evalúe $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ en cada caso justifique.
- a) $\vec{F}(x, y) = y \vec{i} + (x + 2y) \vec{j}$
 C es un arco de circunferencia que comienza en $(0, 1)$ y termina en $(2, 1)$.
- b) $\vec{F}(x, y, z) = 2xy^3z^4 \vec{i} + 3x^2y^2z^4 \vec{j} + 4x^2y^3z^3 \vec{k}$
 C está dada por $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $z(t) = t^3$, con $0 \leq t \leq 2$
5. Demuestre que la integral de línea $\int_C [2x \operatorname{sen} y dx + (x^2 \cos y - 3y^2) dy]$, es independiente de la trayectoria en \mathbb{R}^2 y evalúe la integral, siendo C una curva suave, cerrada y simple arbitraria que va desde $(-1, 0)$ hasta $(5, 1)$.
6. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y) = \frac{y^2}{x^2} \vec{i} - \frac{2y}{x} \vec{j}$ al mover un objeto desde $A(1, 1)$ hasta $B(3, 2)$, por alguna trayectoria en el primer cuadrante.
7. Dado el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = z \cos(xz) \vec{i} + e^y \vec{j} + x \cos(xz) \vec{k}$:
- a) Determine si \vec{F} es conservativo en todo \mathbb{R}^3 .
- b) En caso afirmativo, halle una función potencial para \vec{F} .
- c) Obtenga la integral de línea de \vec{F} a lo largo de un tramo de hélice que va desde $(\frac{1}{2}, 0, \pi)$ hasta $(\frac{1}{2}, 0, 3\pi)$.

6.3 Integral de superficie de un campo vectorial

En la Sección 5.4 definimos la integral de superficie de una función escalar f en una superficie paramétrica S en el espacio, denotada simbólicamente por $\iint_S f dS$, donde dS indica un elemento de superficie. Si $\vec{r}(u, v)$, con $(u, v) \in D_{uv}$, es una parametrización de la superficie S , se calcula mediante la siguiente integral doble (en el plano paramétrico uv): $\iint_{D_{uv}} f(\vec{r}(u, v)) |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv$.

Por otro lado, en la Sección 6.2 definimos la integral de línea de un campo vectorial \vec{F} a lo largo de una curva C , denotada simbólicamente por $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Buscamos una parametrización de la curva C , dada por $\vec{r}(t)$ con $t \in [a, b]$; luego la integral se calcula mediante: $\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$.

Es el turno ahora de definir la integral de superficie de un campo vectorial, también conocida como *flujo* del campo a través de la superficie.

Definición Sea $\vec{F}(x, y, z) : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial, y sea $S \subset E$ una superficie suave en el espacio. Sea $\vec{r}(u, v)$ con $(u, v) \in D_{uv}$, una parametrización de S . Se define la *integral de superficie (o flujo) de \vec{F} a través de S* como

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{D_{uv}} \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)) du dv.$$

En la definición, $d\vec{S} = \vec{n} dS$ representa un vector de módulo dS (elemento de superficie) y con dirección perpendicular al mismo dada por el vector normal inducido por la parametrización, $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$. Luego, dado que se tiene el producto escalar $\vec{F} \cdot \vec{n}$, podemos interpretar la integral del campo vectorial a través de la superficie como el flujo de la componente del campo que es *normal* a la superficie ¹. Ver Figura 6.3.1.

¹Recordar, de la Sección 6.2, que en el caso de la integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva, podemos interpretarla como la integral de la componente del campo que es *tangencial* a la curva, dado que allí se tiene el producto escalar $\vec{F} \cdot \vec{T}$, siendo \vec{T} un vector tangente a la curva.

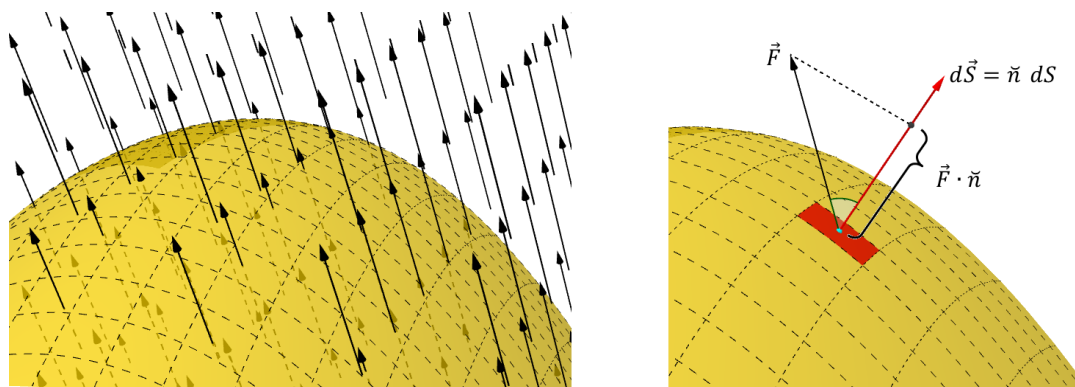


Figura 6.3.1: La integral de superficie del campo vectorial \vec{F} a través de la superficie paramétrica S orientada según \vec{n} acumula, para cada punto de la superficie, el valor de la componente normal del campo multiplicado por el área del elemento de superficie. Ver Figura 6.2.1.



En el siguiente recurso se modeliza el paso de un fluido a través de una superficie plana esquematizando el campo de velocidades.

<http://ggbm.at/smaREQkh>

La integral de superficie de un campo vectorial da como resultado un número real (el resultado es un escalar). Se pueden probar las siguientes propiedades:

Teorema 6.3.1 – Propiedades de las integrales de superficie.

- El valor de la integral de superficie de un campo vectorial no depende de la parametrización utilizada para la superficie, siempre que ésta sea cubierta una sola vez.
- La integral de superficie de un campo vectorial a través de una superficie formada por dos trozos, es igual a la suma de las integrales de superficie de dicho campo a través de cada trozo. Simbólicamente,

$$\iint_{S_1 \cup S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

- La integral de superficie de un campo vectorial depende de la orientación de la superficie,

$$\iint_{-S} \vec{F} \cdot d\vec{S} = - \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

donde $-S$ indica la misma superficie S pero con orientación opuesta.

Puede ocurrir que la superficie S sea la frontera de una región sólida E , lo que denotaremos como

$$S = \partial E.$$

Entonces S es una superficie cerrada. En estos casos, la integral de superficie recibe el nombre de *flujo neto* del campo vectorial, y es común usar una notación especial:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

para indicar explícitamente que S es cerrada. Llamaremos flujo neto saliente o entrante, de acuerdo a que consideremos la cara externa o la interna, respectivamente, de S .

Ejercicio Compare estas propiedades con las que corresponden a la integral de superficie de una función escalar. ¿Qué similitudes y diferencias observa?

- **Ejemplo 6.3.1** Calcular $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, siendo $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + \cosh^3(xyz)\vec{k}$ y S la superficie cilíndrica de eje z y radio 3, entre $z = 0$ y $z = 5$, con orientación alejándose del eje z .
 Notar primero que, dado que cualquier elemento de superficie de un cilindro circular recto de eje z tiene vector normal perpendicular a dicho eje, se tiene que la tercera componente del vector $d\vec{S}$ es nula. Una parametrización suave y que cubre S una sola vez, está dada por la función vectorial $\vec{r}(\alpha, z) = 3 \cos \alpha \vec{i} + 3 \sin \alpha \vec{j} + z \vec{k}$ con $\alpha \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, 5]$, y el vector normal a esta superficie paramétrica resulta

$$\vec{n}(\alpha, z) = \vec{r}_\alpha \times \vec{r}_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 \sin \alpha & 3 \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cos \alpha \vec{i} + 3 \sin \alpha \vec{j}$$

con tercera componente nula, esto es, \vec{n} es un vector horizontal en todo punto de la superficie. Es importante verificar, antes de calcular el flujo del campo vectorial, que la parametrización utilizada asigne la orientación correcta de la superficie. Variando α de 0 a 2π (para cualquier parámetro z) se verifica que el vector \vec{n} hallado apunta siempre alejándose del eje del cilindro, luego la parametrización dada induce la orientación correcta (sino, era necesario tomar el vector opuesto). Al hacer el producto escalar entre el campo dado y \vec{n} , sólo sobreviven las dos primeras componentes. La integral de superficie de \vec{F} a través de S se calcula reemplazando las variables x, y, z de \vec{F} por el valor que toman en la superficie: $3 \cos \alpha$, $3 \sin \alpha$, z , respectivamente. Entonces queda por resolver la siguiente integral doble en los parámetros (α, z) pertenecientes $D_{\alpha z} = [0, 2\pi] \times [0, 5]$:

$$\begin{aligned} & \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_{D_{\alpha z}} (3 \cos \alpha, 3 \sin \alpha, \cosh^3(9z \cos \alpha \sin \alpha)) \cdot (3 \cos \alpha, 3 \sin \alpha, 0) \, d\alpha \, dz \\ &= \iint_{[0, 2\pi] \times [0, 5]} (9 \cos^2 \alpha + 9 \sin^2 \alpha + 0) \, d\alpha \, dz \\ &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} 9 \, d\alpha \, dz = 9 \alpha \Big|_0^{2\pi} z \Big|_0^5 = 90 \pi. \end{aligned}$$

■

- **Ejemplo 6.3.2** Calcular la integral de superficie del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = \vec{i}\frac{x}{4} + \vec{j}\frac{y}{4} + \vec{k}\frac{z}{4}$ a través de la superficie dada por la porción del paraboloide $4 - z = x^2 + y^2$ con $z \geq 0$ y con orientación “hacia arriba”.

En este caso la superficie tiene una representación explícita de la forma $z = g(x, y)$; dicho de otro modo, S es la parte en el semiespacio superior de la gráfica de la función $g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$. Adoptaremos la parametrización trivial, dada por la función vectorial $\vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + (4 - x^2 - y^2)\vec{k}$, con los parámetros x, y en el círculo $D_{xy} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Luego el vector normal a esta superficie paramétrica resulta:

$$\vec{n}(x, y) = \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$

con tercera componente +1, lo que asegura que es un vector que apunta “hacia arriba” en todo punto de la superficie dada, esto es, para cualquier par de parámetros (x, y) . O sea que

la parametrización utilizada asigna la orientación correcta a la superficie.

La integral de superficie de \vec{F} a través de S resulta en la integral doble en el dominio paramétrico D_{xy} :

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \\ &= \iint_{D_{xy}} \left(\frac{x}{4}, \frac{y}{r}, \frac{4-x^2-y^2}{4} \right) \cdot (2x, 2y, 1) \, dx \, dy = \frac{1}{4} \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2 + 4) \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^2 + 4)(r \, dr \, d\theta) = 6\pi.\end{aligned}$$

En la última línea, resolvimos la integral doble por medio de una transformación a coordenadas polares, que facilita el cálculo en este caso. ■

- **Ejemplo 6.3.3** Hallar el flujo neto saliente de $\vec{F}(x, y, z) = z\check{i} + y\check{j} + x\check{k}$ a través de la superficie de la esfera unitaria centrada en el origen.

La superficie S de la esfera de radio 1 centrada en $(0, 0, 0)$ tiene una representación sencilla en coordenadas esféricas, siendo $\rho = 1$ para todo par de valores de las variables angulares ϕ y θ . Haciendo $\rho = 1$ en las ecuaciones de transformación de coordenadas esféricas a cartesianas, obtenemos

$$x = 1 \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = 1 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = 1 \cos \phi.$$

Luego logramos expresar a x, y, z en términos de ϕ, θ , de modo que podemos tomar a estos dos ángulos como parámetros. Una función vectorial que parametriza la superficie es entonces $\vec{r}(\phi, \theta) = \operatorname{sen} \phi \cos \theta \check{i} + \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \check{j} + \cos \phi \check{k}$ con $\phi \in [0, \pi]$, y con $\theta \in [0, 2\pi]$. El vector normal a esta superficie paramétrica resulta

$$\begin{aligned}\vec{n}(\phi, \theta) = \vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta &= \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \operatorname{sen} \theta & -\operatorname{sen} \phi \\ -\operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \operatorname{sen} \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \operatorname{sen}^2 \phi \cos \theta \check{i} + \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen} \theta \check{j} + \operatorname{sen} \phi \cos \phi \check{k}\end{aligned}$$

que tiene orientación saliendo de la esfera, tal como se pide. Notar que en este ejemplo S es una superficie *cerrada* (es la frontera de una región sólida); luego es orientable, y las dos orientaciones posibles son “hacia afuera” o “hacia adentro” del sólido. El producto escalar entre el campo vectorial (evaluado en la superficie) y el vector normal en cada punto da:

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \vec{n} &= \vec{F}(\vec{r}(\phi, \theta)) \cdot \vec{n}(\phi, \theta) \\ &= (\cos \phi, \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \operatorname{sen} \phi \cos \theta) \cdot (\operatorname{sen}^2 \phi \cos \theta, \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen} \theta, \operatorname{sen} \phi \cos \phi) \\ &= \cos \phi \operatorname{sen}^2 \phi \cos \theta + \operatorname{sen}^3 \phi \operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \phi \cos \theta \cos \phi.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el flujo neto saliente de \vec{F} a través de S es:

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi \cos \theta + \operatorname{sen}^3 \phi \operatorname{sen}^2 \theta \right) d\phi d\theta \\
&= 2 \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi d\phi \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + \int_0^\pi \operatorname{sen}^3 \phi d\phi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta \\
&= \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}$$

¿Cuánto vale el flujo neto *entrante* del mismo campo a través de la superficie esférica unidad en el origen? ■

6.3.1 Ejercicios

- Calcule la integral de superficie $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, para el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z)$ y la superficie orientada S dados:
 - $\vec{F}(x, y, z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$; S es la parte del paraboloides $z = 4 - x^2 - y^2$ que se encuentra arriba del cuadrado $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, con orientación “hacia arriba”.
 - $\vec{F}(x, y, z) = xze^y\vec{i} - xze^y\vec{j} + z\vec{k}$; S es la parte del plano $x + y + z = 1$ que está en el primer octante, con orientación “hacia abajo”.
 - $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} - y\vec{j} + z^4\vec{k}$; S es la parte del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que está entre los planos $z = 2$ y $z = 3$, con orientación alejándose del eje del cono.
- Halle el flujo neto saliente del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z)$ dado, a través de la superficie S :
 - $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{j} - z\vec{k}$; S está formada por parte del paraboloides $y = x^2 + z^2$, con $0 \leq y \leq 1$, y el disco $x^2 + z^2 \leq 1$, con $y = 1$.
 - $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k}$; S es la frontera del cubo de vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.
 - $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + 5z\vec{k}$; S es la frontera de la región cilíndrica $0 \leq x^2 + z^2 \leq 1$ entre el plano $y = 0$ y el plano $x + y = 2$.

6.4 Teorema de Green

El Teorema de Green relaciona una integral de línea a lo largo de una curva cerrada en el plano, con una integral doble en la región encerrada por dicha curva. Podemos pensarlo como una extensión del teorema fundamental del cálculo, para integrales dobles.

Una curva C , cerrada y simple en el plano puede estar orientada en sentido contrario al que giran las agujas del reloj (*orientación positiva*), o en el mismo sentido en el que giran las agujas del reloj (*orientación negativa*). Cuando C está orientada en sentido antihorario, la llamaremos C^+ ; y si está orientada en sentido horario la llamaremos C^- . Una curva plana cerrada delimita una región del plano. La orientación positiva para la curva frontera de una región del plano se puede recordar mediante este recurso: si “caminamos” a lo largo de la curva frontera en el sentido de la orientación positiva, la región quedará siempre a nuestra izquierda (trace una curva cerrada en el piso y recórrala en sentido positivo). Para la curva frontera o borde orientado positivamente de una región plana $D \subset \mathbb{R}^2$, usaremos la notación $C^+ = \partial D^+$. El teorema de Green se refiere a una curva cerrada con orientación positiva y la región encerrada por ella. Ver figura 6.4.1.

Teorema 6.4.1 – Teorema de Green. Sea C^+ una curva suave a trozos, cerrada, simple y positivamente orientada (con sentido antihorario) del plano. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ la región plana limitada por dicha curva. Si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones escalares de dos variables que tienen derivadas parciales continuas en una región abierta del plano que contiene a D y a C^+ , entonces:

$$\oint_{C^+} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

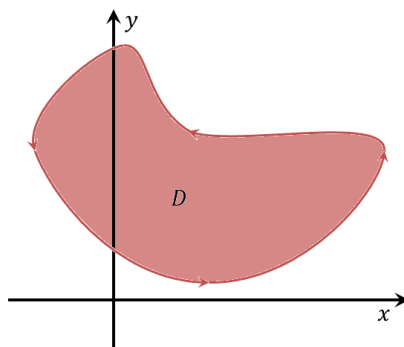


Figura 6.4.1: Teorema de Green: la suma de las integrales de P y Q respecto de x y de y , respectivamente, a lo largo de C equivale a la integral doble de $Q_x - P_y$ en D . La orientación de la curva C es en sentido antihorario (dejando a D a la izquierda).

No incluimos aquí la demostración de este importante teorema del análisis vectorial, pero sí discutimos varios ejemplos y aplicaciones, analizando sus hipótesis y sus consecuencias. Ver Figura 6.4.1.

Haremos la comprobación de que se cumple el teorema de Green para “un” ejemplo particular. Por supuesto, analizar un solo caso no demuestra la validez de una propiedad o teorema, pero nos servirá para ver cómo funciona y los elementos que intervienen. Realizaremos la verificación evaluando las dos integrales del teorema de Green: por un lado la integral doble (como vimos en la Sección 5.2 del Capítulo 5 y por el otro la integral de línea (como vimos en la Sección 5.4 del Capítulo 5), y comprobaremos que dan el mismo resultado.

■ **Ejemplo 6.4.1** Verificar el teorema de Green para el par de funciones $P(x, y) = x$, $Q(x, y) = xy^2$, donde la región D es el disco unitario.

Antes de utilizar el teorema debemos asegurarnos de que se cumplen todas las hipótesis para la región de integración, para la curva frontera, y para las funciones intervinientes:

- Región: $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ es una región del plano. OK ✓
- Curva: $C^+ = \partial D^+ = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, \text{ antihoraria}\}$ es la frontera de D , es suave, cerrada y simple, y se toma en sentido antihorario, que es el sentido positivo respecto de la región D . OK ✓
- Funciones: $P(x, y) = x$, $Q(x, y) = xy^2$ son de clase C^1 en todo \mathbb{R}^2 . OK ✓

La frontera de D es la circunferencia de radio 1 con sentido antihorario, y admite la parametrización $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$, con $t \in [0, 2\pi]$. Por un lado, la integral de línea resulta:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D^+} (P dx + Q dy) &= \oint_{\partial D^+} (x dx + xy^2 dy) \\ &= \int_0^{2\pi} [(\cos t)(-\sin t dt) + (\cos t)(\sin t)^2(\cos t dt)] \\ &= \left[\frac{\cos^2 t}{2} + \frac{1}{8} \left(t - \frac{\sin(4t)}{4} \right) \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

donde usamos identidades trigonométricas para escribir

$$\sin^2 t \cos^2 t = \left(\frac{1}{2} \sin(2t) \right)^2 = \frac{1}{4} \frac{1 - \cos(4t)}{2}.$$

Por otro lado, la integral doble es:

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA &= \iint_D (y^2 - 0) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r \operatorname{sen} \theta)^2 (r dr d\theta) \\ &= \left[\frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} \right) \right]_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

donde usamos cambio de variables a coordenadas polares. ■

- Ⓒ El teorema de Green es muy útil, ya que relaciona una integral de línea a lo largo de la curva frontera de una región, con una integral doble en el interior de la región. En muchos casos es más fácil evaluar la integral de línea que la integral doble, usando la igualdad:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_{\partial D^+} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy]$$

Por ejemplo si sabemos que $P(x, y)$ se anula en la frontera de D y que $Q(x, y) = 0$ es la función nula, podemos concluir de inmediato que $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA = 0$ aunque $\frac{\partial P}{\partial y}$ no se anule en el interior de D . Es el caso, por ejemplo, de $P(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ en el círculo unidad. Resaltamos que NO hicimos el cálculo de la integral doble, sino el de la integral de línea equivalente. Usaremos este resultado como aplicación del teorema de Green para calcular el área de una región plana.

Ahora supongamos que C es una curva cerrada y suave a trozos, que se obtiene uniendo varias curvas por sus extremos; entonces el proceso de evaluación de la integral de línea a lo largo de C de una función escalar puede ser muy laborioso porque se deben parametrizar todos los tramos y evaluar las integrales de línea a lo largo de cada tramo. Sin embargo, si C encierra una región D para la que se aplica el teorema de Green, podemos usar este teorema para obtener la integral de línea a lo largo de C mediante la evaluación de una integral doble en D , como se muestra en los siguientes ejemplos:

-
- **Ejemplo 6.4.2** Usando el teorema de Green, hallar el valor de la integral de línea $\oint_{C^+} (xy dy - y^2 dx)$, donde C^+ es el borde del cuadrado D limitado por las rectas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, recorrido en sentido positivo.

El enunciado sugiere NO hacer el cálculo de la integral de línea, sino el de la integral doble. Debemos asegurarnos que las hipótesis del teorema de Green se cumplen para la región, para la curva frontera, y para las funciones que intervienen en esta cuenta (asegúrese). Vemos que $P(x, y) = -y^2$, $Q(x, y) = xy$, entonces:

$$\begin{aligned} \oint_{C^+} (-y^2 dx + xy dy) &= \iint_D \left(\frac{\partial(xy)}{\partial x} - \frac{\partial(-y^2)}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_D (y + 2y) dA = \int_0^1 \int_0^1 3y dx dy \\ &= \int_0^1 [3yx]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 3y dy = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

■

- **Ejemplo 6.4.3** Evaluar $\oint_C [(2x^3 - y^3) dx + (x^3 + y^3) dy]$, donde C es la curva frontera, orientada positivamente, de la región D del semiplano superior que se encuentra entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

La curva cerrada C es la frontera de la región $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$, y está constituida por dos tramos rectos y dos tramos en forma de semicircunferencia. Podemos evaluar la integral de línea aplicando el teorema de Green, con lo cual pasamos a evaluar un integral doble en D en lugar de cuatro integrales de línea. Haga un gráfico de D y señale los 4 tramos que forman C .

Para el cómputo de la integral doble, conviene describir la región D en coordenadas polares: $D = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \oint_C [(2x^3 - y^3) dx + (x^3 + y^3) dy] &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^3) - \frac{\partial}{\partial y}(2x^3 - y^3) \right) dA \\ &= \iint_D (3x^2 + 3y^2) dA = \int_0^\pi \int_1^2 (3r^2) (r dr d\theta) \\ &= 3 [\theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_1^2 = \frac{45}{4} \pi. \end{aligned}$$

■

Se puede probar que el Teorema de Green es válido también en regiones planas con agujeros. Vemos este resultado en el siguiente ejemplo:

- **Ejemplo 6.4.4** Verificar el teorema de Green para el anillo D comprendido entre las circunferencias de radios 1 y 2, y las funciones $P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ y $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

En este caso la región D no es simple, porque tiene un agujero. En coordenadas polares está dada por $D = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. La frontera de D está formada por dos curvas que, para poder aplicar el teorema de Green, debemos considerar con orientación positiva respecto de D . Entonces la circunferencia interior C_1 debe ser recorrida en el sentido de las agujas del reloj, de manera de dejar a la región D a su izquierda, mientras que la circunferencia exterior C_2 se recorre en contra de las agujas del reloj. De esta forma, $\partial D^+ = C^+ = C_1 \cup C_2$ es la curva frontera de D orientada positivamente. Consideramos las parametrizaciones $\vec{r}_1(t) = \cos t \vec{i} - \sin t \vec{j}$, con $t \in [0, 2\pi]$, y $\vec{r}_2(t) = 2 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j}$, con $t \in [0, 2\pi]$, para C_1 y C_2 respectivamente. Calculamos las derivadas parciales de P y Q que necesitaremos:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Las funciones P y Q y sus derivadas parciales de primer orden son continuas en D (que no incluye al origen). Ya podemos aplicar el teorema de Green.

Por un lado la integral doble en D es

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D 0 dA = 0.$$

Por otro lado, la integral de línea a lo largo de ∂D^+ es

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial D^+} (P dx + Q dy) &= \oint_{C_1} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right) \\
&\quad + \oint_{C_2} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right) \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{(-\sin t)}{1} (-\sin t dt) + \frac{\cos t}{1} (-\cos t dt) \right) \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \left(-\frac{(2 \sin t)}{4} (-2 \sin t dt) + \frac{2 \cos t}{4} (2 \cos t dt) \right) \\
&= \int_0^{2\pi} (-dt) + \int_0^{2\pi} dt = 0.
\end{aligned}$$

Luego, hemos verificado que ambas integrales son iguales (en este caso, ambas dan cero). ■

Aplicación del Teorema de Green al cálculo del área de una región plana

Podemos usar el teorema de Green para obtener una fórmula alternativa para calcular el área de una región simple del plano, acotada por una curva cerrada simple y suave a trozos. Hemos visto en el Capítulo 5 que la siguiente integral doble permite obtener el área de una región D :

$$A(D) = \iint_D 1 dA.$$

Para vincular con el teorema de Green, tendríamos que buscar un par de funciones P y Q tales que el integrando de la integral doble del teorema tenga un valor constante (igual 1) dentro de D . Buscamos entonces P y Q tales que:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 1$$

A los fines prácticos, es conveniente que P y Q tengan expresiones sencillas, al menos en la curva frontera de D . De esa forma, será fácil (en principio) evaluar la integral de línea correspondiente a lo largo de $C^+ = \partial D^+$ (orientada positivamente), y obtendremos una fórmula alternativa para el cálculo del área.

Una elección posible es, por ejemplo, tomar $P(x, y) = -y$ con $Q(x, y) = g(y)$, siendo lo más sencillo tomar $Q(x, y) = 0$ (al menos en la frontera de D), de tal forma que

$$A(D) = - \oint_{\partial D^+} y dx.$$

Otra opción es tomar $Q(x, y) = x$ con $P(x, y) = f(x)$, en particular la elección trivial $P(x, y) = 0$; luego

$$A(D) = \oint_{\partial D^+} x dy.$$

También es útil elegir $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$, pero en este caso obtendremos el doble del área de D , luego

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D^+} [-y dx + x dy].$$

Demostremos este último resultado:

Dado que se verifican las hipótesis del teorema de Green para la región D , para su curva frontera $C^+ = \partial D^+$, y para las funciones $P = -y$, $Q = x$, se tiene

$$\oint_{\partial D^+} [-y dx + x dy] = \iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dA = \iint_D [1 - (-1)] dA = 2 \iint_D dA = 2 A(D).$$

Por supuesto, hay una infinidad de opciones para elegir P y Q de manera adecuada para calcular el área de una región plana usando una integral de línea. Las 3 formas que discutimos arriba son las más sencillas. Proponga otras elecciones adecuadas para P y Q , que satisfagan que $\frac{\partial Q}{\partial x}$ y $\frac{\partial P}{\partial y}$ difieran en una constante.

6.4.1 Teorema de Green y campos vectoriales

No hemos mencionado en esta sección, hasta ahora, ningún campo vectorial: el teorema de Green, tal como lo enunciamos, vincula una integral de línea y una integral doble para un par de funciones escalares de 2 variables. Veamos que si las funciones P y Q que intervienen en el teorema se consideran como funciones componentes de un campo vectorial, se puede expresar el teorema de Green “en forma vectorial”, en términos de la divergencia o el rotor de un campo vectorial.

- Si consideramos un campo vectorial en el plano de la forma $\vec{F}(x, y) = iP(x, y) + jQ(x, y)$, entonces la integral de línea de funciones escalares que aparece en el teorema de Green no es más que la integral de línea de dicho campo vectorial a lo largo de la curva C , esto es, la integral de línea de la componente tangencial del campo:

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

donde $\vec{F} = (P, Q)$, $\vec{T} ds = (dx, dy) = d\vec{r}$, siendo \vec{T} el vector tangente unitario en cada punto de C , orientada positivamente respecto de la región D que encierra.

Del otro lado de la igualdad en el teorema, el integrando en la integral doble no es más que la tercera componente del rotor de \vec{F} :

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{k} dA$$

donde $\vec{k} dA = d\vec{S}$ representa el elemento de área y apunta en dirección normal al plano xy que contiene a D . Tomando a D como una superficie (plana) en el espacio, la expresión de la derecha recuerda la definición de integral de superficie, en este caso de un campo vectorial. Luego, el Teorema de Green se puede expresar alternativamente de la siguiente manera:

La circulación de la componente tangencial de un campo vectorial a lo largo de la curva C , frontera positivamente orientada de la región D , es igual a la integral doble en D de la componente del rotor de dicho campo que es normal al plano que contiene a D (dicho más concretamente, es igual a la integral de superficie o flujo del rotor del campo a través de la superficie D)¹:

$$\oint_{C=\partial D^+} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \iint_D (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{k} dA.$$

- Observemos la integral doble en el teorema de Green: el integrando puede interpretarse como la divergencia de un campo vectorial en el plano de la forma $\vec{G}(x, y) = iQ(x, y) - jP(x, y)$:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial(-P)}{\partial y} \right) dA = \iint_D (\vec{\nabla} \cdot \vec{G}) dA$$

Del otro lado de la igualdad en el teorema, la integral de línea de funciones escalares puede interpretarse como la integral de línea de la componente de dicho campo vectorial que es normal a la curva C :

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \oint_C (Q dy + (-P)(-dx)) = \oint_C \vec{G} \cdot \vec{N} ds,$$

donde $\vec{G} = (Q, -P)$, y $\vec{N} ds = (dy, -dx)$, siendo \vec{N} el vector normal unitario en cada punto de C , apuntando hacia afuera de la región D .

¹Este resultado se extiende a \mathbb{R}^3 para curvas y superficies no necesariamente planas en el espacio, dando lugar al llamado *Teorema de Stokes o del rotor*. Sección 6.5

Luego, el Teorema de Green se puede expresar alternativamente de la siguiente manera: La integral de línea de la componente normal de un campo vectorial a lo largo de la curva cerrada C , frontera positivamente orientada de la región plana D , es igual a la integral doble en D de la divergencia de dicho campo ² Escribimos:

$$\oint_{C=\partial D^+} \vec{F} \cdot \vec{N} \, ds = \iint_D (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \, dA$$

(donde renombramos el campo vectorial como \vec{F}).

6.4.2 Ejercicios

1. Evalúe la siguiente integral de línea por método directo y usando el teorema de Green:

$$\oint_{C^+} (xy \, dx + x^2y^3 \, dy),$$
 donde C^+ es el borde orientado positivamente del triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$.
2. Utilice el Teorema de Green para evaluar la integral de línea a lo largo de la curva dada, positivamente orientada:
 - a) $\oint_C [(y + e^{\sqrt{x}}) \, dx + (2x + \cos(y^2)) \, dy]$, donde C es la frontera de la región delimitada por las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$
 - b) $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F}(x, y) = \check{y}y^6 + \check{y}xy^5$ y C es la elipse $4x^2 + y^2 = 1$
3. Usando el Teorema de Green, halle el área de la región limitada por la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = \cos t \check{i} + \sin^3 t \check{j}$, $t \in [0, 2\pi]$.

6.5 Teorema de Stokes o Teorema del rotor

El Teorema de Stokes relaciona una integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva cerrada en el espacio, con cierta integral de superficie a través de una superficie que tiene a dicha curva como frontera.

En la Sección 6.4 se vimos el Teorema de Green y discutimos “formas vectoriales” de expresar este teorema. Una de ellas es la siguiente:

La circulación de la componente tangencial de un campo vectorial a lo largo de una curva $C \subset \mathbb{R}^2$, frontera positivamente orientada de la región plana D , es igual a la integral a través de la superficie D (con orientación hacia arriba) del rotor del campo vectorial.

Y adelantamos que este resultado (que involucra una región D y su frontera C en \mathbb{R}^2) se extiende a \mathbb{R}^3 para una superficie y su frontera no necesariamente planas, dando lugar al llamado *Teorema de Stokes o del rotor*.

Teorema 6.5.1 – Teorema de Stokes (o Teorema del rotor). Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie suave a trozos, simple y orientable del espacio. Sea $C = \partial S^+$ la curva cerrada que es frontera de dicha superficie, con orientación positiva respecto de S . Si $\vec{F}(x, y, z)$ es un campo vectorial en el espacio cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta del espacio que contiene a S y a C , entonces

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}.$$

Usando la notación $d\vec{r} = \check{T} \, ds$ y $d\vec{S} = \check{n} \, dS$, donde ds indica el elemento de arco de la curva y dS el elemento de área de la superficie, el Teorema de Stokes se escribe:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \check{T} \, ds = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \check{n} \, dS.$$

²Este resultado se extiende a \mathbb{R}^3 para una superficie cerrada y la región sólida encerrada, dando lugar al llamado *Teorema de Gauss o de la divergencia*. Sección 6.6

Escrito así observamos que el Teorema de Stokes establece una equivalencia entre:

la integral de la componente normal del rotor de un campo vectorial \vec{F} a través de una superficie orientable S

\equiv

la integral de la componente tangencial de \vec{F} a lo largo de la frontera C de S , estando la curva positivamente orientada respecto de la superficie

- Ⓒ Notar que para aplicar el teorema es necesario elegir una orientación para la curva (cerrada, simple, suave a trozos) que sea compatible con la orientación de la superficie (orientable, simple, suave a trozos). Por otro lado, es imprescindible que el campo vectorial sea de clase C^1 , de manera que el rotor queda bien definido. Ver Figura 6.5.1.

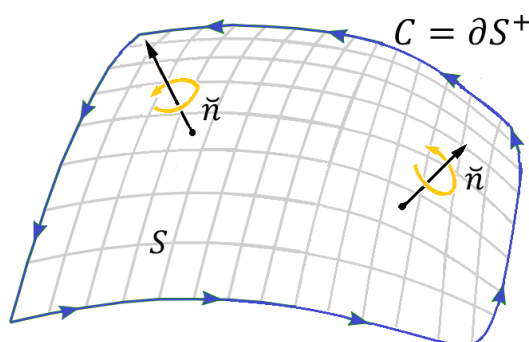


Figura 6.5.1: Teorema de Stokes: la integral de \vec{F}_{tang} a lo largo de $C = \partial S^+$ equivale a la integral de $(\vec{\nabla} \times \vec{F})_{\text{norm}}$ a través de S . La orientación de la curva C es en sentido positivo respecto a la superficie S .

No incluimos aquí la demostración de este importante teorema del análisis vectorial, pero sí discutimos ejemplos y aplicaciones, analizando sus hipótesis y sus consecuencias.

Haremos la comprobación de que se cumple el Teorema de Stokes para “un” ejemplo particular. Como ya hemos dicho, analizar un solo caso no demuestra la validez de una propiedad o teorema, pero nos servirá para ver cómo funciona y los elementos que intervienen. Realizaremos la verificación evaluando las dos integrales del Teorema de Stokes: por un lado la integral de superficie y por el otro la integral de línea, y comprobaremos que dan el mismo resultado.

- **Ejemplo 6.5.1** Verificar el Teorema de Stokes para el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = 3y\vec{i} + 4z\vec{j} - 6x\vec{k}$, y la superficie S que es la parte del paraboloido $z = 9 - x^2 - y^2$ que se encuentra por encima del plano xy , orientada “hacia arriba”.

Antes de utilizar el teorema debemos asegurarnos de que se cumplen todas las hipótesis para la superficie de integración, para su curva frontera, y para el campo vectorial interviniente:

- Superficie: $S : z = 9 - x^2 - y^2$, con $z \geq 0$, es una superficie orientable del espacio; eligiendo la cara que se ve desde $+z$, en todo punto de S el vector normal apunta hacia arriba (esto es, la tercera componente de \vec{n} debe ser siempre positiva). OK ✓
- Curva: $C = \partial S^+$. Es la frontera de S , es suave, cerrada y simple; elegimos el sentido antihorario mirando desde $+z$, que es el sentido “positivo” respecto de la superficie S . OK ✓
- Campo vectorial: $\vec{F}(x, y, z) = 3y\vec{i} + 4z\vec{j} - 6x\vec{k}$ tiene sus tres funciones componentes de clase C^1 en todo \mathbb{R}^3 . OK ✓

Calculamos por un lado la integral de línea

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt,$$

considerando la siguiente parametrización de la curva C dada por $\vec{r}(t) = 3 \cos t \vec{i} + 3 \sin t \vec{j} + 0 \vec{k}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$. Para aplicar la definición de integral de línea, debemos evaluar \vec{F} en los puntos $\vec{r}(t)$ de la curva, y hallar también la derivada de la función vectorial, $\vec{r}'(t)$, que es un vector tangente a la curva:

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}(t)) &= 3(3 \sin t) \vec{i} + 4(0) \vec{j} - 6(3 \cos t) \vec{k} = 9 \sin t \vec{i} + 0 \vec{j} - 18 \cos t \vec{k} \\ \vec{r}'(t) &= -3 \sin t \vec{i} + 3 \cos t \vec{j} + 0 \vec{k}\end{aligned}$$

Entonces la integral de línea de \vec{F} a lo largo de C da

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} (9 \sin t, 0, -18 \cos t) \cdot (-3 \sin t, 3 \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-27 \sin^2 t) dt = -27 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt \\ &= -27 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = -27\pi.\end{aligned}$$

Calculamos por otro lado la integral de superficie

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_{D_{xy}} (\vec{\nabla} \times \vec{F})(\vec{r}(x, y)) \cdot (\vec{r}_x \times \vec{r}_y) dx dy,$$

considerando la siguiente parametrización trivial de la superficie S dada por $\vec{r}(x, y) = x \vec{i} + y \vec{j} + (9 - x^2 - y^2) \vec{k}$, con los parámetros x e y en el círculo $D_{xy} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$. Para aplicar la definición de integral de superficie, debemos obtener el rotor de \vec{F} y evaluarlo en puntos $\vec{r}(x, y)$ de la superficie, y hallar también el vector normal a la superficie inducido por la parametrización, $\vec{r}_x(x, y) \times \vec{r}_y(x, y)$. Tenemos

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & 4z & -6x \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k},$$

que resulta un vector constante en cualquier punto de la superficie S , mientras que el vector normal a la superficie paramétrica resulta:

$$\vec{n} = \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k},$$

con tercera componente $+1$, esto es, la parametrización corresponde a la cara del paraboloides que mira hacia arriba, tal como se deseaba. Sugerencia: grafique la superficie S y marque sobre ella varios "parches"; en cada parche dibuje el vector normal y el rotor del campo vectorial.

Entonces la integral de superficie de $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ a través de S da

$$\begin{aligned}\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \iint_{D_{xy}} (-4, 6, -3) \cdot (2x, 2y, 1) dx dy = \iint_{D_{xy}} (-8x + 12y - 3) dx dy \\ &= -3 \iint_{D_{xy}} 1 dx dy = -3 A(D_{xy}) = -27\pi\end{aligned}$$

donde en la última línea, en lugar de hacer los cálculos explícitamente, hemos aprovechado el hecho de que las integrales $\iint_{D_{xy}} x dx dy$ y $\iint_{D_{xy}} y dx dy$ se anulan por simetría, y que $\iint_{D_{xy}} 1 dx dy$ es igual al área A del círculo de radio 3.

Ambos resultados coinciden. Verificamos, entonces, el Teorema de Stokes en este ejemplo particular. ■

El Teorema de Stokes es muy útil, ya que relaciona una integral de línea a lo largo de la curva frontera de una superficie en el espacio, con una integral de superficie a través de ésta. En algunos casos es más fácil evaluar la integral de línea que la integral de superficie, en otros al revés:

■ **Ejemplo 6.5.2** Aplicar el Teorema de Stokes para evaluar la integral de superficie del rotor de $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} - x\vec{j} + e^{xz}\vec{k}$, a través de la mitad superior de la superficie esférica que corta al plano $z = 0$ en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. La superficie está orientada en el sentido de la normal hacia arriba.

El enunciado propone la resolución de la integral de línea de \vec{F} , en vez de computar directamente el flujo de su rotor. Es fácil ver que tanto el campo como las regiones (superficie y su curva frontera) satisfacen las condiciones del teorema. La curva C sobre la cual debemos integrar está dada por, en coordenadas cartesianas, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, y debemos asignarle sentido antihorario mirando desde $+z$ para que sea coherente con la orientación hacia arriba de la superficie dada. Grafique la superficie y la curva, indicando la orientación de S y el sentido de C . En forma paramétrica la curva puede expresarse como $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + 0\vec{k}$, con $t \in [0, 2\pi]$.

Necesitaremos el campo vectorial evaluado en puntos de la curva: $\vec{F}(x(t), y(t), z(t)) = \sin t \vec{i} - \cos t \vec{j} + \vec{k}$, y el vector $\vec{r}'(t) = -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}$. Luego la integral de superficie pedida se puede calcular por teorema como la siguiente integral de línea:

$$\begin{aligned}\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \oint_{C=\partial S^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t + 0) dt = -2\pi.\end{aligned}$$

Observar que no fue necesario evaluar el rotor del campo vectorial. ■

Dos resultados importantes que se derivan del Teorema de Stokes para campos vectoriales de clase C^1 son los siguientes (justifique):

- Si S es una superficie cerrada, entonces $\oiint_{S_C} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$.
- Si S_1 y S_2 son dos superficies con la misma curva frontera y toma la misma orientación respecto de dicha curva, entonces $\iint_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$.

¿Cómo aplicaría la segunda propiedad para facilitar el cómputo de la integral de superficie del Ejemplo 6.3.2?

6.5.1 Ejercicios

- Obtenga el Teorema de Green como caso particular del Teorema de Stokes.
- Utilice el Teorema de Stokes para evaluar $\iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S}$:
 - $\vec{F}(x, y, z) = x^2 e^{yz}\vec{i} + y^2 e^{xz}\vec{j} + z^2 e^{xy}\vec{k}$, y S es la superficie de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, orientada “hacia arriba”.
 - $\vec{F}(x, y, z) = xyz\vec{i} + xy\vec{j} + x^2 yz\vec{k}$, y S está formada por la cara superior y las cuatro caras laterales, pero no la base, del cubo de vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, orientada “hacia afuera”.
- Utilice el Teorema de Stokes para evaluar $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. En cada caso C está orientada en sentido contrario al giro de las agujas del reloj, visto desde “arriba”:
 - $\vec{F}(x, y, z) = (x + y^2)\vec{i} + (y + z^2)\vec{j} + (z + x^2)\vec{k}$, y C es el triángulo con vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.
 - $\vec{F}(x, y, z) = 2z\vec{i} + 4x\vec{j} + 5y\vec{k}$, y C es la curva intersección del plano $z = x + 4$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
- Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + z^2)\vec{i} + (y^2 + x^2)\vec{j} + (z^2 + y^2)\vec{k}$, al mover una partícula alrededor del borde de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está en el primer octante, en sentido antihorario (visto desde “arriba”).

6.6 Teorema de Gauss o Teorema de la divergencia

El Teorema de Gauss relaciona una integral de superficie de un campo vectorial a través de una superficie cerrada en el espacio, con cierta integral triple en la región sólida que tiene a dicha superficie como frontera.

Al discutir en la Sección 6.4 el Teorema de Green y sus “formas vectoriales”, vimos que podía expresarse de la siguiente manera:

La integral de línea de la componente normal de un campo vectorial a lo largo de una curva cerrada $C \subset \mathbb{R}^2$, frontera positivamente orientada de la región plana D , es igual a la integral doble en D de la divergencia del campo vectorial.

Y mencionamos que este resultado (que involucra una curva cerrada C y la región plana D que ella encierra, en \mathbb{R}^2) se extiende a \mathbb{R}^3 , pero ahora para el caso de una superficie cerrada y la región sólida que ella encierra, dando lugar al llamado *Teorema de Gauss o de la divergencia*.

Teorema 6.6.1 – Teorema de Gauss (o Teorema de la divergencia). Sea $E \subset \mathbb{R}^3$ una región sólida simple del espacio. Sea $S = \partial E^+$ la superficie cerrada, suave a trozos y orientable que es frontera de dicha región, con orientación hacia afuera del sólido. Si $\vec{F}(x, y, z)$ es un campo vectorial en el espacio cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta del espacio que contiene a E y a S , entonces:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV.$$

Empleando la notación $d\vec{S} = \vec{n}dS$, donde dS indica el elemento de área de la superficie, el Teorema de Gauss se escribe:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_E (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV.$$

Puesto así notamos que el Teorema de Gauss establece una equivalencia entre:

la integral de la divergencia de un campo vectorial \vec{F} dentro de una región sólida E

≡

la integral de la componente normal de \vec{F} a través de la frontera S de E , estando la superficie positivamente orientada respecto del sólido.

- Ⓒ Notar que para aplicar el teorema es necesario que la orientación de la superficie (cerrada, orientable, suave a trozos) sea hacia afuera de la región sólida (simple). Por otro lado, es imprescindible que el campo vectorial sea de clase C^1 , de forma que la divergencia queda bien definida. Ver Figura 6.6.1.

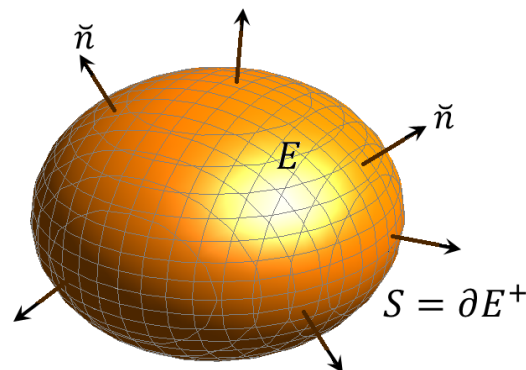


Figura 6.6.1: Teorema de Gauss: la integral de \vec{F}_{norm} a través de $S = \partial E^+$, equivale a la integral de $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ dentro de E . La orientación de la superficie S es hacia afuera del sólido E .

No incluimos aquí la demostración de este importante teorema del análisis vectorial, pero sí discutimos ejemplos y aplicaciones, analizando sus hipótesis y sus consecuencias.

Haremos la comprobación de que se cumple el Teorema de Gauss para “un” ejemplo particular. Es sabido que, analizar un solo caso no demuestra la validez de una propiedad o teorema, pero nos servirá para ver cómo funciona y los elementos que intervienen. Realizaremos la verificación evaluando las dos integrales del Teorema de Gauss: por un lado la integral de superficie (flujo neto) y por el otro la integral triple, y comprobaremos que dan el mismo resultado.

- **Ejemplo 6.6.1** Verificar el Teorema de Gauss para el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, y la esfera sólida E dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, siendo a un número real fijo.

Antes de utilizar el teorema debemos asegurarnos de que se cumplen todas las hipótesis para la región sólida para su superficie frontera, y para el campo vectorial interviniente:

- Región sólida: $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ es una región simple del espacio. OK ✓
- Superficie: $S = \partial E^+$ está dada por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Es una superficie cerrada, suave y orientable del espacio; elegimos la cara exterior (esto es, el vector normal debe apuntar hacia afuera del sólido E). OK ✓
- Campo vectorial: $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ tiene sus tres funciones componentes de clase C^1 en todo \mathbb{R}^3 . OK ✓

Calculamos la integral de superficie,

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{D_{uv}} \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{r}_u \times \vec{r}_v \, dudv$$

Como vimos en el Ejemplo 5.4.2 de la Sección 5.4.1, una parametrización para S es $\vec{r}(u, v) = a \cos u \sin v \vec{i} + a \sin u \sin v \vec{j} + a \cos v \vec{k}$, con $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. El vector normal resulta:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = -a^2 \cos u \sin^2 v \vec{i} - a^2 \sin u \sin^2 v \vec{j} - a^2 \cos v \sin v \vec{k}$$

y es hacia adentro de la esfera. Por lo tanto su vector opuesto $\vec{r}_v \times \vec{r}_u = -\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ porque se desea que apunte hacia fuera. Además, el campo en puntos de la superficie vale:

$\vec{F}(\vec{r}(t)) = a \cos u \operatorname{sen} v \vec{i} + a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \vec{j} + a \cos v \vec{k}$. Calculamos primero $\vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{r}_u \times \vec{r}_v$ que queda

$$\begin{aligned} & (a \cos u \operatorname{sen} v, a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, a \cos v) \cdot (a^2 \cos u \operatorname{sen}^2 v, a^2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen}^2 v, a^2 \cos v \operatorname{sen} v) \\ &= a^3 \cos^2 v \operatorname{sen} v + a^3 \cos^2 u \operatorname{sen}^3 v + a^3 \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^3 v \\ &= a^3 \cos^2 v \operatorname{sen} v + a^3 \operatorname{sen}^3 v (\cos^2 u \operatorname{sen}^2 u) \\ &= a^3 \cos^2 v \operatorname{sen} v + a^3 \operatorname{sen}^3 v = a^3 \operatorname{sen} v (\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) = a^3 \operatorname{sen} v \end{aligned}$$

Entonces la integral de superficie de \vec{F} a través de S da

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_{[0, 2\pi] \times [0, \pi]} \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{r}_u \times \vec{r}_v \, dudv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^3 \operatorname{sen} v \, dudv \\ &= a^3 \int_0^{2\pi} [-\cos v]_0^\pi \, du = a^3 \int_0^{2\pi} 2 \, du = 4\pi a^3 \end{aligned}$$

Por otro lado calculamos la integral triple $\iiint_E (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \, dV$. La divergencia de \vec{F} es:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3,$$

de modo que

$$\iiint_E (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \, dV = \iiint_E 3 \, dV = 3 \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right) = 4\pi a^3.$$

Ambos resultados coinciden (para cualquier a fijo). Verificamos, entonces, el Teorema de Gauss en este ejemplo particular. ■

El Teorema de Gauss es muy útil, ya que relaciona una integral de superficie a través de la frontera de una región sólida en el espacio, con una integral triple dentro de dicho sólido. En algunos casos es más fácil evaluar la integral de superficie que la integral triple, en otros al revés:

- **Ejemplo 6.6.2** Aplicar el Teorema de Gauss para evaluar la integral de superficie de $\vec{F}(x, y, z) = xy^2 \vec{i} + x^2y \vec{j} + y \vec{k}$, a través de la superficie S del bloque cilíndrico E dado por $x^2 + y^2 \leq 1$ acotado por los planos $z = \pm 1$.

El enunciado propone la resolución de la integral triple de la divergencia de \vec{F} , en vez de computar directamente el flujo neto del campo (que, en este caso, está dado por la suma de tres integrales de superficie: una para la pared lateral cilíndrica, y dos para las tapas inferior y superior del cilindro). Tanto el campo como las regiones (sólido y su superficie frontera) satisfacen las condiciones del teorema. Tener en cuenta que el enunciado no plantea si se trata del flujo neto entrante o saliente; dado que la orientación que impone el teorema de Gauss es hacia afuera del cilindro, nuestra respuesta será el flujo saliente (para el flujo entrante, bastará dar el valor opuesto al obtenido). Grafique el sólido y su superficie frontera, indicando el vector normal para cada una de las 3 porciones que la componen.

Necesitamos la divergencia del campo vectorial: $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial z}(y) = y^2 + x^2$.

Luego, la integral de superficie (hacia afuera) se puede calcular por teorema como la siguiente integral triple:

$$\begin{aligned} \iint_{S=\partial E^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iiint_E -E \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV \\ &= \iiint_E (x^2 + y^2) \, dV = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 (r \, dr \, d\theta \, dz) \\ &= \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 \theta \Big|_0^{2\pi} z \Big|_{-1}^1 = \pi, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado transformación a coordenadas cilíndricas para el cómputo de la integral triple. ■

Un resultado importante que se deriva del Teorema de Gauss para campos vectoriales de clase C^2 es el siguiente (justifique):

- Si S_C es una superficie suave (o suave a trozos), cerrada y orientable, y \vec{F} es un campo vectorial de clase C^2 , entonces

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0.$$

6.6.1 Ejercicios

1. Verifique que se cumple el Teorema de la divergencia para el campo $\vec{F}(x, y, z) = 3x\vec{i} + xy\vec{j} + 2xz\vec{k}$, en la región sólida E que es el cubo limitado por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ y $z = 1$.
2. Utilice el Teorema de Gauss para evaluar en cada uno de los casos siguientes, la integral de superficie $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$:
 - a) $\vec{F}(x, y, z) = -xz\vec{i} - yz\vec{j} + z^2\vec{k}$, S es el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
 - b) $\vec{F}(x, y, z) = (3xy, y^2, -x^2y^4)$, S es la superficie del tetraedro con vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.
3. Sea $\vec{F}(x, y, z) = z \arctan(y^2)\vec{i} + z^3 \ln(x^2 + 1)\vec{j} + z\vec{k}$. Encuentre el flujo de \vec{F} que atraviesa la parte del paraboloides $x^2 + y^2 + z = 2$ que está arriba del plano $z = 1$ y está orientado hacia arriba.
4. Pruebe las siguientes identidades, suponiendo que S y R satisfacen las correspondientes condiciones del Teorema de Gauss y las funciones escalares y componentes de los campos vectoriales tienen derivadas parciales continuas de segundo orden.
 - a) $\iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) \, dS = 0$, donde \vec{a} es un vector constante.
 - b) $V(R) = \frac{1}{3} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, donde $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
 - c) $\iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$

6.7 Actividades integradoras y autoevaluación

6.7.1 Actividades integradoras

- Dado el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = z \cos(xz) \vec{i} + e^y \vec{j} + x \cos(xz) \vec{k}$:
 - determinar si \vec{F} es conservativo en todo \mathbb{R}^3 ;
 - en caso afirmativo, obtener una función potencial para \vec{F} mediante la técnica de integraciones parciales;
 - hallar la integral de línea de \vec{F} a lo largo del tramo de hélice que va desde $A(\frac{1}{2}, 0, \pi)$ hasta $B(\frac{1}{2}, 0, 3\pi)$.
- Verificar que el campo $\vec{F}(x, y, z) = (2xy, x^2 + z^2, 2zy)$ es conservativo en todo \mathbb{R}^3 . Hallar la integral de línea a lo largo de una curva que une el punto $A(1, 1, 0)$ con $B(0, 2, 3)$. ¿Qué teorema utiliza? Enunciar y demostrar.
- ¿Cuánto vale la circulación de un campo vectorial $\vec{F}(x, y)$ conservativo, a lo largo de cualquier curva cerrada, suave y simple del plano? Justificar la respuesta.
- Dada la función escalar $f(x, y, z)$, suponiendo que todas las derivadas parciales requeridas son continuas, verificar la siguiente propiedad:

$$\operatorname{div}(\vec{\nabla} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F} = z \vec{i} - x \vec{j} + z \vec{k}$, a lo largo de la curva C determinada por la intersección de la superficie $z = (x - 1)^2 + y^2$ y el plano $z = 4$, en sentido contrario a las agujas del reloj mirando desde el semieje z positivo.
 - Idem $a)$ pero a lo largo de $-C$.
- Calcular la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (2 - y, x, 0)$ y C es la curva intersección de las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 4y$, con C recorrida en sentido antihorario mirando desde el semieje z positivo.
- Utilizando una integral de línea, calcular el área de la región del primer cuadrante limitada por la recta $x + y = 5$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$.
- Calcular utilizando una función potencial, si es posible, $\int_C [y^2 z dx + 2xyz dy + xy^2 dz]$ siendo C una curva en el espacio que va desde $A(0, 1, 1)$ hasta $B(2, 5, 2)$.
- Evaluar la circulación del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = y^2 \vec{i} - y \vec{j} + 3z^2 \vec{k}$ a lo largo de la curva en la que el plano $2x + 6y - 3z = 6$ corta al cilindro $x^2 + y^2 = 1$, en el sentido antihorario visto desde arriba.
- Verificar el teorema de Green, siendo $\vec{F}(x, y) = (y^2, x^2)$ y C el borde de la región comprendida entre las gráficas de $y = x$ e $y = \frac{x^2}{4}$.
- Considerar una región plana de tipo I, $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$. Sean $P(x, y) = f(y)$ y $Q(x, y) = 0$ en D , con f' continua. Aplicar el teorema de Green, planteando la integral de línea y la integral doble; probar que en ambos casos se llega a $\int_a^b [f(g_1(t)) - f(g_2(t))] dt$.
- Desarrolle la expresión del Teorema de Stokes en términos de las componentes del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, de clase C^1 , para una superficie que es la gráfica de la función $g(x, y)$ apuntando hacia arriba, esto es S dada por $z = g(x, y)$ con $(x, y) \in [0, a] \times [0, a]$, siendo $a > 0$, fijo.
 - Desarrolle la expresión del Teorema de Gauss en términos de las componentes del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, de clase C^1 , para la región sólida $R = [0, a] \times [0, a] \times [0, a]$, siendo $a > 0$, fijo.
- ¿Cómo emplearía el Teorema de Green para calcular el área de una región plana en \mathbb{R}^2 (sin resolver una integral doble)?

- b) Describa cómo se podría emplear el Teorema de Stokes para calcular el área superficial de una superficie abierta y orientable en \mathbb{R}^3 (sin resolver una integral de superficie).
- c) ¿Cómo emplearía el Teorema de Gauss para calcular el volumen de una región sólida en \mathbb{R}^3 (sin resolver una integral triple)?
14. Verifique que se cumple el Teorema de Stokes para el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ siendo S la parte del paraboloido $z = 1 - x^2 - y^2$ que está arriba del plano xy , con orientación hacia arriba.
15. Evalúe la integral de superficie o flujo para el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, xy, z)$, a través de la superficie S que es la parte del paraboloido $z = x^2 + y^2$ abajo del plano $z = 1$ con orientación hacia arriba.
16. Aplique el Teorema de Stokes para evaluar $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde $\vec{F}(x, y, z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ y C es el triángulo con vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, orientado en sentido antihorario, visto desde arriba.
17. Utilice el Teorema de Gauss para calcular la integral de superficie $\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{G}) \cdot d\vec{S}$, donde $\vec{F}(x, y, z) = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ y S es la superficie del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 0$ y $z = 2$.
18. a) Dado el campo de velocidades de un fluido $\vec{V} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$, halle cuántos m^3/seg fluyen a través de la superficie S del cilindro $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ limitada por los planos $z = 0$ y $z = 1$.
- b) Si a la superficie del inciso anterior se agrega la parte sobre el plano $z = 0$ y la parte sobre $z = 1$, calcule el flujo total hacia afuera del sólido encerrado por esas superficies.
19. Sean S_1 y S_2 dos superficies orientables con la misma curva frontera y \vec{F} un campo vectorial diferenciable con continuidad en \mathbb{R}^3 . ¿Qué relación hay entre los flujos del $\text{rot}(\vec{F})$ a través de estas superficies?

6.7.2 Autoevaluación

- Usando el teorema de Green, hallar el área de la región encerrada por la elipse parametrizada por $\vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + b \sin t \vec{j}$ con $t \in [0, 2\pi]$.
- Utilice el Teorema de Stokes para evaluar $\iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S}$ siendo $\vec{F}(x, y, z) = (x + \arctan(yz))\vec{i} + y^2z\vec{j} + z\vec{k}$, y S es la parte de la semiesfera $x = \sqrt{9 - y^2 - z^2}$, que se encuentra dentro del cilindro $y^2 + z^2 = 4$, orientada en el sentido positivo del eje x .
- Utilice el Teorema de Gauss para evaluar en cada uno de los casos siguientes la integral de superficie $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ siendo $\vec{F}(x, y, z) = x^2y\vec{i} - x^2z\vec{j} + z^2y\vec{k}$, S es la superficie de la caja rectangular limitada por los planos $x = 0, x = 3, y = 0, y = 2, z = 0, z = 1$.

Bibliografía

- Edwards, B. H., Larson, R. (2016). *Cálculo*, Tomo II. Cengage.
- Larson, R., Hostetler, R., Edwards, B. H. (2002). *Cálculo*, Vol. 2. Madrid: Pirámide.
- Marsden, J. E., Tromba, A. (1998). *Cálculo vectorial*. Mexico: Addison Wesley Longman.
- Smith, R. T., Minton, R. (2000). *Cálculo*. Tomo 2. Santafe de Bogotá: McGraw-Hill.
- Stewart, J. (2008). *Cálculo: Trascendentes tempranas*. Mexico: Cengage Learning.
- Stewart, J. (2012). *Cálculo de varias variables y trascendentes tempranas*. Mexico: Cengage.

Autores

Baragatti, Esteban Eduardo

Obtuvo el título de Licenciado en Matemática en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata. Allí ha trabajado como docente en varias asignaturas; actualmente forma parte, junto con Alejandra Vahnovan del Equipo Coordinador de la asignatura Análisis Matemático I (CiBEx). Además, forma parte del equipo de trabajo del Espacio Pedagógico de la Facultad. Su interés particular está en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a nivel universitario.

Portesi, Mariela Adelina

Obtuvo el título de Licenciada en Física en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata, y el grado de Doctora en Física en la misma casa de altos estudios. Posee cargo docente de Profesor Adjunto en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNLP, desempeñándose como integrante del Equipo Coordinador de la asignatura Análisis Matemático II (CiBEx), junto con María Teresa Martín (2013-2015) y Dra. María Eugenia García (desde 2016); también ha impartido cursos de posgrado en la Facultad de Ciencias Exactas de la UNLP y en la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación de la Universidad Nacional de Córdoba, y ha sido Profesor Visitante en la Université Grenoble-Alpes en Francia. Es Investigador Independiente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, con lugar de trabajo en el Instituto de Física La Plata. Su especialidad es la teoría y geometría de la información aplicadas a sistemas cuánticos.

Schuverdt, María Laura

Obtuvo el título de Licenciada en Matemática en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata, y el grado de Doctora en Matemática Aplicada en el Instituto de Matemática y Estadística de la Universidad Estatal de Campinas, Brasil. Posee cargo docente de Profesor Adjunto en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNLP. Es Investigadora Independiente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, con lugar de trabajo en el Departamento de Matemática. Su especialidad es la optimización no lineal.

Portesi, Mariela Adelina

Cálculo en 2 y 3 variables : enfoque teórico-práctico para CiBEx / Mariela Adelina Portesi ;
María Laura Schuverdt ; Esteban Eduardo Baragatti. - 1a ed. - La Plata : Universidad Nacional
de La Plata ; La Plata : EDULP, 2019.

Libro digital, PDF - (Libros de cátedra)

Archivo Digital: descarga

ISBN 978-950-34-1751-5

1. Cálculo Diferencial. 2. Cálculo Integral. 3. Ciencias Exactas. I. Schuverdt, María Laura. II.
Baragatti, Esteban Eduardo. III. Título.
CDD 515

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata

47 N.º 380 / La Plata B1900AJP / Buenos Aires, Argentina

+54 221 427 3992 / 427 4898

edulp.editorial@gmail.com

www.editorial.unlp.edu.ar

Eduulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2019

ISBN 978-950-34-1751-5

© 2019 - Eduulp

e
exactas